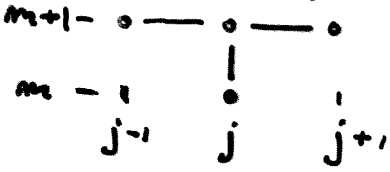
Luento 8, 15.3.05

Implisiittinen ja Crank-Nicholson

$u_t = u_{xx}$ $\qquad r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

Implis: $(I + rA)\, v^{m+1} = \tilde{v}^m$



$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{v}^m = v^m + r \begin{array}{c} \begin{bmatrix} v_0^{m+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{n+1}^{m+1} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \\ n \end{array}$$

[Edellisessä näin, v_0^2 oltava v_0^1, v_{n+1}^2 -- v_{n+1}^1]

Stabiilisuus: Ol. 0-RE:t

$$(I + rA)\, v^{m+1} = v^m$$

$$\Rightarrow \quad v^{m+1} = (I + rA)^{-1} v^m .$$

$I + rA$:n om. arvot: $1 + r\lambda_k$

Jotta ratkaisu käyttäytyisi, kuten analyyttinen (pysyy raj.) on oltava: $|\text{om. arvot}| < 1$.

$(I + rA)^{-1}$:n om. arvot: $\frac{1}{1 + r\lambda_k}$ ja $\lambda_k > 0$, joten stabiilisuusehto on voimassa riippumatta r:stä.

Implisiittisen menetelmän ongelmana on kuitenkin $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$.
Tästä syystä aika-askeleen on kuitenkin oltava huomattavasti Δx:ää pienempi.

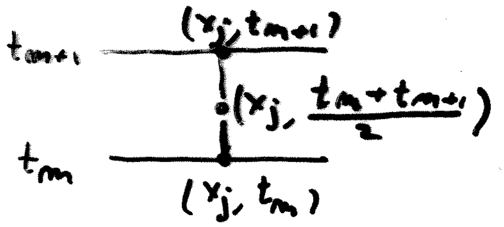
Cranck - Nicholson

Tavoite: - $O(\Delta t^2)$ - approksimaatio u_t:lle
- säilytettävä stabiilisuus

Keskidifferenssiapprox:

$$\begin{cases} f(t+h) = f(t) + h f'(t) + \frac{h^2}{2} f''(t) + O(h^3) \\ f(t-h) = f(t) - h f'(t) + \frac{h^2}{2} f''(t) + O(h^3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f'(t) = \frac{1}{2h}\left(f(t+h) - f(t-h)\right) + O(h^2)$$



$$u_{xx}\left(x_j, \frac{t_m + t_{m+1}}{2}\right) \simeq \frac{1}{2}\left(u_{xx}(x_j, t_m) + u_{xx}(x_j, t_{m+1})\right)$$

$\qquad \| \quad$ (Lämpöyht.)

$$u_t\left(x_j, \frac{t_m + t_{m+1}}{2}\right) = \frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} + \underline{O(\Delta t^2)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_{j-1}^m - 2v_j^m + v_{j+1}^m}{\Delta x^2} + \frac{v_{j-1}^{m+1} - 2v_j^{m+1} + v_{j+1}^{m+1}}{\Delta x^2}\right),$$

$$j = 1, \ldots, m$$

Merk: $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, $(m+1)$ - termit vas.
m - termit oik.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} -r v_{j-1}^{m+1} + 2(1+r) v_j^{m+1} - r v_{j+1}^{m+1} &= \\ r v_{j-1}^m + 2(1-r) v_j^m + r v_{j+1}^m, \quad j = 1..m \end{aligned}}$$

$j=1:$

$$2(1+r)v_1^{m+1} - r v_2^{m+1} = 2(1-r)v_1^m + r v_2^m + \underbrace{r(v_0^m + v_0^{m+1})}_{\text{reuna-arvot}}$$

$j=n:$

$$-r v_{n-1}^{m+1} + 2(1+r)v_n^{m+1} = r v_{n-1}^m + 2(1-r)v_n^m + \underbrace{r(v_{n+1}^m + v_{n+1}^{m+1})}_{\text{reuna-arvot}}$$

$$\begin{bmatrix} 2(1+r) & -r & & \\ -r & 2(1+r) & -r & \\ & \ddots & & -r \\ & & -r & 2(1+r) \end{bmatrix} v^{m+1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(1-r) & r & & \\ r & 2(1-r) & & \\ & & \ddots & \\ & & \ddots & r \\ & & r & 2(1-r) \end{bmatrix} v^m$$

$$+ \begin{bmatrix} r(v_0^m + v_0^{m+1}) \\ 0 \\ r(v_{n+1}^m + v_{n+1}^{m+1}) \end{bmatrix}$$

Merk. taas kuten: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Siis:

$$\boxed{(2I + rA)v^{m+1} = (2I - rA)v^{m} + r\begin{bmatrix} v_0^{m} + v_0^{m+1} \\ 0 \\ v_{M+1}^{m} + v_{M+1}^{m+1} \end{bmatrix}}$$

Iteraatiomatriisi M: $(2I + rA)^{-1}(2I - rA)$

$2I + rA$:lla ja $2I - rA$:lla on selvästi samat om. vektorit, joten myös $(2I + rA)^{-1}$:llä ja $(2I - rA)$:lla on samat om. vektorit, joten tulon om. arvot ovat vastaavien om. arvojen tulot.

Siis M:n om. arvot: $\dfrac{2 - r\mu_k}{2 + r\mu_k}$,

missä μ_k on A:n om. arvo, $0 < \mu_k (< 4)$.

Siis $|M\text{:n om. arvot}| < 1 \quad \forall r > 0$.

Menetelmä on siis stabiili $\forall r > 0$

"unconditionally stable".

Matlabin pdepe

[Hig - Hig] 12.4 ss. 170 - 176
» doc pdepe

Ratkaisee erinäisiä parabolisia tai elliptisiä yhtälöitä (systeemejä). Käyttää Matlabin ODE-ratkaisijoita. Menetelmät ovat siten (kai) "method of lines" - tyyppisiä.

Koodi avoin: >> type pdepe

yleisesti: vektoriarvoinen tuntematon fkt.

$(x,t) \mapsto u(x,t)$ (x ja t skalaareja)

$$\left[\begin{array}{l} c(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m}\frac{\partial}{\partial x}(x^m \overbrace{f(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x})}^{\text{flux}}) \\ \qquad + \underbrace{s(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x})}_{\text{source}} \\ a \le x \le b, \quad t_0 \le t \le t_f \end{array}\right] \text{YHT.}$$

$m = 0, 1, 2$

AE: $u(x,t_0) = u_0(x)$ (annettu fkt.)

RE: $x=a$: $p_a(x,t,u) + q_a(x,t)f(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}) = 0$

$x=b$: $p_b(x,t,u) + q_b(x,t)f(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}) = 0$

Kutsun yleinen muoto:

```
sol = pdepe(m,@pdefun,@pdeic,@pdebc,xmesh,
            tspan,options,p1,p2,...);

function [c,f,s] = pdefun(x,t,u,DuDx,p1,p2,...)
function u0 = pdeic(x,p1,p2,...)
function [pa,qa,pb,qb] =
         = pdebc(xa,ua,xb,ub,t,p1,p2,...)
```