Palataan max/min -periaatteen todistukseen. Muutetaan päättelyn logiikkaa $\Rightarrow$ ei tarvita ylim. jonokompaktisuuksia ym. [Pieni yksinkertaistettu notaatio: Ol. $k=1$]

Olk. $M = \max_{\overline{Q}_T} u = u(x_0, t_0)$.

Vastaol: $\max_{\Gamma_T} u = M - \varepsilon$ jollain $\varepsilon > 0$.

Olk. $v(x,t) = u(x,t) - \frac{\varepsilon}{2T}(t - t_0)$.

$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M$. [Modifioitiin vähän]

Osoitetaan, että $\Gamma_T$:ssä ( $\sqcup$ ) $v < M$:

$$v(a,t) = \underbrace{u(a,t)}_{\le M-\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2T}(t - t_0) < M - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$v(b,t) = u(b,t) - \frac{\varepsilon}{2T}(t - t_0) < M - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$v(x,0) = u(x,0) + \frac{\varepsilon}{2T} t_0 < M - \frac{\varepsilon}{2}$$

Siispä $v$ ei saavuta maksimiaan $\Gamma_T$:ssä.

Olk. $(x_1, t_1) \in \overline{Q}_T$ : $v(x_1, t_1) = \max_{\overline{Q}_T} v$.

Oltava siis $a < x_1 < b$, $0 < t_1 \le T$.

Jos $t_1 < T$, oltava $v_t = 0$ ja $v_{xx} \le 0$

Jos $t_1 = T$, oltava $v_t \ge 0$ ja $v_{xx} \le 0$ $\quad t = T$

$t = T$

Siis $(x_1, t_1)$:ssä $v_t - v_{xx} \ge 0$ [Olk. lämpöyhtälö $k = 1$]

Mutta: $v_t - v_{xx} = u_t - \frac{\varepsilon}{2T} - u_{xx}$

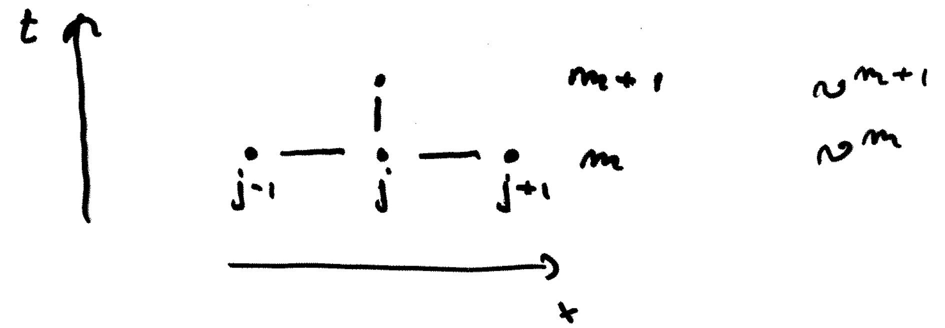
$= -\frac{\varepsilon}{2T}$ (koska $u$ tot. lämpöyht.)

RR, tod. on valmis. $\square$

Palataan vielä eksplisiittiseen differenssimenetelmään, jota voitaisiin kutsua myös Eulerin menetelmäksi. ($t$-suunnassa edetään Euler-askelin.)

Siirrytään [T-W]-notaatioon.

$$\left( k = 1, \quad s = r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right)$$




$$\boxed{v_j^{m+1} = r v_{j-1}^m + (1-2r) v_j^m + r v_{j+1}^m, \quad j = 1 \ldots n, \quad m \geq 0.}$$

Oletetaan 0-RE:t (muutkin Dirichlet-RE:t olisi hyvin helppo ottaa mukaan).

$$\Longrightarrow$$

$$v^{m+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-2r & r & 0 & \cdots & 0 \\ r & 1-2r & r & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & \cdots & r & 1-2r \end{bmatrix}}_{I - rA, \text{ missä}} v^m$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

A:n om. arvot
$$\mu_k = 4 \sin^2 \frac{k \pi \Delta x}{2}, \quad k = 1, \ldots, n$$

$$0 < \mu_k < 4.$$

$I - rA$ :n om. arvot : $\lambda_k = 1 - r\mu_k$

$I - rA$ on diagonalisoituva,

$$I - rA = V D V^{-1}, \quad D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

$$(I - rA)^m = V \,\mathrm{diag}(\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m)\, V^{-1}$$

Jotta iteraatio pysyisi rajoitettuna, on oltava $|\lambda_k| \le 1 \quad \forall k = 1, \ldots, n$.

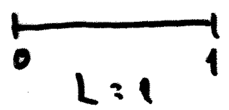
$$\Rightarrow \quad \underbrace{-1 \le 1 - r\mu_k}_{\Downarrow} \le 1$$

$$r \le \frac{2}{\mu_k}, \quad k = 1, \ldots, n$$

$$\Rightarrow \quad r \le \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Tämä on välttämätön ehto sille, että Eulerin differenssimenet. voisi supeta kohti ratkaisua (ainakin 0 - RE:lla ja yleisemminkin, jos RE - funktiot ovat rajoitetut, kun $t \to \infty$), max - periaatteen nojalla.

Exa 4.1 s. 120 AE: $f(x) = \sin(2\pi x)$



$\lambda_n = n\pi$

Ominaisfunktio $u_2(x,t) = \sin 2\pi x \, e^{-\lambda_2^2 t}$ on tarkka ratk.

Harj. teht.: Laske Eulerilla ja vertaa. Maplessa valmiina lampodiffE (ns05.mpl)

Tee vastaava Matlab:lla.

(Otetaan kuitenkin Exa 4.2 s.121)

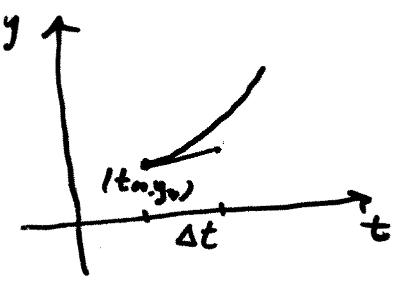
# Implisiittinen menetelmä

[TW] 4.4 s. 140
[Coo] 3.6 ss. 107 – 109

Muistellaan: Tavall. diff. yht. AA-teht.

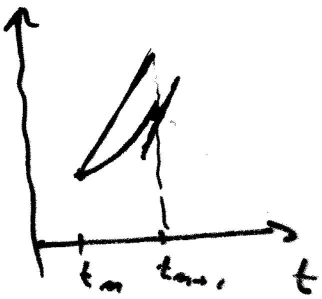
$y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$.

$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$.




Jos yhtälö stabiili ($\frac{\partial f}{\partial y} < 0$), niin EM on stabiili vain, jos $\Delta t < \frac{2}{|f_y|}$

Syst. tapa. $\Delta t < \frac{2}{\lambda_{max}}$ $J_y$:n om. arvo




Sen sijaan implisiittinen Euler (BE) on stabiili, vaikka $\Delta t$ olisi miten suuri!

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

(Ratkaistava $y_{n+1}$!)

---

Käytetään [TW]:n notaatiota.

| [Coo]: | [TW] |
|---|---|
| $u_t = k u_{xx}$ | $u_t = u_{xx}$ |
| $s = \frac{k \Delta t}{\Delta x^2}$ | $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ |

---

Lausutaan nyt samat differenssikaavayhtälöt muodostettuna pisteessä $(x_j, t_{n+1})$, jolloin aikasuunnassa mennään taaksepäin, eli otetaan BE-askel.

$\Longrightarrow$

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^{n}}{\Delta t} = \frac{v_{j-1}^{n+1} - 2 v_j^{n+1} + v_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

Merk $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ $\Longrightarrow$

$$v_j^{m+1} - r v_{j-1}^{m+1} + 2r v_j^{m+1} - r v_{j+1}^{m+1} = v_j^m$$

$\Longrightarrow$

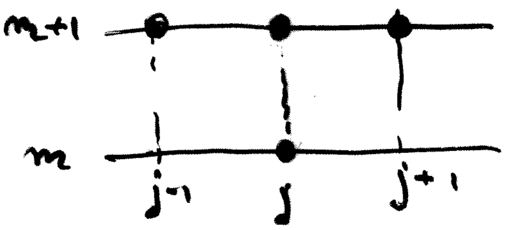
$$j=1: \quad v_1^{m+1} - r v_0^{m+1} + 2r v_1^{m+1} - r v_2^{m+1} = v_1^m$$

$$j=2: \quad v_2^{m+1} + r(-v_1^{m+1} + 2 v_2^{m+1} - v_2^{m+1}) = v_2^m$$

$$\vdots$$

$$j=n \quad v_n^{m+1} + r(-v_{n-1}^{m+1} + 2 v_n^{m+1} - v_{n+1}^{m+1}) = v_n^m$$

[Otetaan yleiset Dirichlet-RE:t, ei välth. 0]



Uusi aikataso saadaan ratkaisemalla lin. yht. syst.:

$$\boxed{(I + rA)\, v^{m+1} = \tilde v^m}$$

, missä

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ja

$$\tilde v^0 = \begin{bmatrix} v_1^0 + r v_0^2 \\ v_2^0 \\ \vdots \\ v_{n-1}^0 \\ v_n^0 + r v_{n+1}^2 \end{bmatrix}$$

Annettuja reuna-arvoja

Annettuja alkuarvoja

(Jos 0-RE:t, niin $\tilde v^m = v^m$)

<u>Huom!</u> <u>Yhtälösysteemi</u> on taatusti <u>ei-singulaarinen</u>, koska A:n ominaisarvot $> 0$ $\Longrightarrow$ $I + rA$:n om. arvot $> 0$ (jopa $> 1$).

Huom! Matriisi $I + rA$ ei muutu aika-askeleesta toiseen. Algoritmi saadaan tehokkaaksi tekemällä yhden kerran LU-hajotelma. Kaikki yhtälösysteemien ratkaisut ovat sitten pelkkää takaisinsijoitusta ($O(n^2)$, normaalisti $O(n^3)$).

Pos. def. ⇒ Gaussin eliminaatiossa ei tarvitse tehdä rivinvaihtoja ⇒ LU-hajotelman nauhaleveys ei kasva lainkaan (L ja U ovat yhtä harvoja kuin A)

[Kts. num. LA, esim. Forsythe-Malcolm-Moler Computer Methods for Math. Comp. s. 56]

## Crank-Nicholsonin menetelmä

[TW] s. 152–153
[Coo] s. 109

Keskiarvo ekspl. ja impl.
Katkaisuvirhe: $O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$
Stabiili $\forall s > 0$

Käytetään [Coo]-notaatiota.

$$\boxed{\begin{aligned} -s u_{j-1,m+1} + (1+2s) u_{j,m+1} - s u_{j+1,m+1} &= \\ s u_{j-1,m} + (1-2s) u_{j,m} + s u_{j+1,m} &, \end{aligned}}$$

$j = 0, \dots, J$. (Tässä on mahdollisesti otettu huomioon Neumann-RE-mahdollisuus, mitä käsit. [Coo] s. 108–109)

Kts. koodit heat3.m heat4.m heat5.m