Cooper s. 77

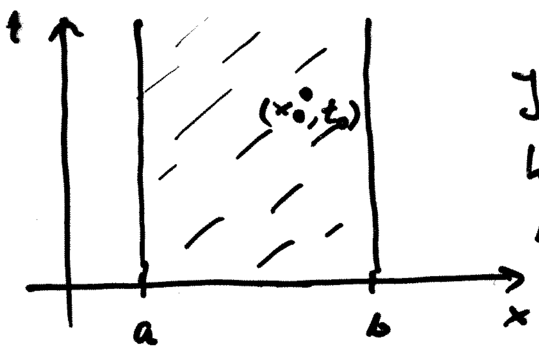
3. 2. The maximum principle

Lämpöyhtälö $\quad u_t(x,t) = k\, u_{xx}(x,t)$

Pelkkä yhtälö ilman R- tai A-ehtoja.
Johdetaan kvalitat. ominm.

Olk. $\quad Q = \{(x,t) \mid a < x < b,\ t > 0\}$

(a ja b mieliv. $\mathbb{R}$-lukuja, eivät liity R-ehtoihin, joita ei edes oleteta)



Jos $(x_0, t_0) \in Q$ olisi paikallinen max, se olisi siitä erit. x-suunnassa, joten $u_x(x_0,t_0) = 0$ ja $u_{xx}(x_0,t_0) < 0$.

[Olisiko varmasti ? No ei ihan, mutta jätetään ideointia.]

Lämpöyht. $\Rightarrow$ $\quad u_t(x_0,t_0) < 0$, joten $t \mapsto u(x_0,t)$ pienenee pist. t_0

(x_0,t_0) Koko riitt. lyhyellä janalla $u(x_0,t) > u(x_0,t_0) \Rightarrow$ ei lok. max, RR.

Max kuitenkin saavutetaan joukossa
$\overline{Q}_T = \{(x,t) \mid a \le x \le b,\ 0 \le t \le T\}$

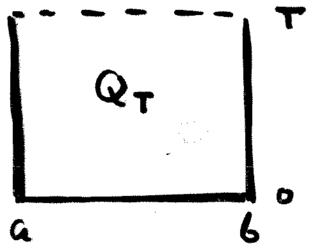
(Jatk. fkt., $\underbrace{\text{sulj., raj.}}_{\text{kompakti}}$ joukko)

Lause 3.1. [Lämpöyhtälön max-periaate (heikko muoto)]

Olk. u (LY):n ratk., joka on jatk. joukossa $\overline{Q}$.

Olk. $Q_T = \{(x,t) \in Q \mid 0 < t < T\}$ ja

$\Gamma_T = \partial Q_T \setminus \{\text{yläreuna}\}$ =



Γ_T

Tällöin $\forall T > 0$ pätee

$$\max_{\overline{Q}_T} u = \max_{\Gamma_T} u .$$

Tod Terästetään yllä esitettyä tarkastelemalla approksimoivaa funktiota

$$v_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - t\varepsilon .$$

Jätetään kuitenkin tässä yksityiskohdat, ks. [Coo] ss. 78–79.

(Lopun lim-perustelut vaatisivat mahdollisesti pienen jonokompaktisuuspäättelyn (raj. jonosta void. valita suppenevan osajonon))

$\square$

Esim: Exe 3.2 L6.maxs ~~L6.m~~ L6maxp.m (a)-kohta

Loput harj. 5:een

Lämpöyhtälön numeriikkaa

[T-W] 4.1 s. 119 →
[Coo] 3.6 s. 105 →

Noudatetaan ainakin aluksi jälkimmäistä.

$$u_t - k u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = f(x).$$

[RE:t otetaan tarpeen mukaan, niiden ei tarvitse olla 0]

Hilapisteet : $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$

Merk $u_{j,n} \simeq u(x_j, t_n)$

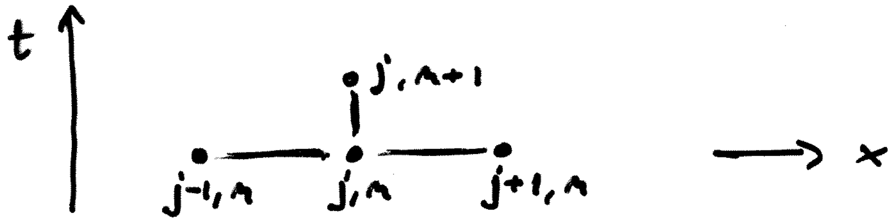
$$u_t(x_j, t_n) = \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$u_{xx}(x_j, t_n) = \frac{1}{(\Delta x)^2}\left(u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)\right) + O(\Delta x^2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u_{j,n+1} - u_{j,n}}{\Delta t} = \frac{k}{\Delta x^2}\left(u_{j+1,n} - 2u_{j,n} + u_{j-1,n}\right)$$

Merk. $s = \dfrac{k\Delta t}{\Delta x^2} \quad \Rightarrow$

$$u_{j,n+1} = (1 - 2s)\, u_{j,n} + s\left(u_{j+1,n} + u_{j-1,n}\right)$$



Eksplisiittinen menetelmä.

[TW]: siis perusteellinen analyysi.
Tyydymme [Coo] - esimerkkiin.

Valitaan AE: $\phi(x) = \varepsilon \cos \frac{\pi x}{\Delta x}$
(cos värähtelee hilan "spatiaalisella" taajuudella (jakso/2 $= \Delta x$))

Olkoon u ratkaisu, ja toteuttakoon lisäksi 0 - RE:t. Tällöin $|u(x,t)| \leq \varepsilon \ \forall x, t$.
Miksi? No vaikka seuraa max - periaatteesta!

Entä diskreetti?

$$\phi(x_j) = \phi(j \Delta x) = \varepsilon \cos j\pi = \varepsilon(-1)^j$$

$$u_{j,1} = (1-2s)\underbrace{u_{j,0}}_{\varepsilon(-1)^j} + s(\underbrace{u_{j+1,0}}_{\varepsilon(-1)^{j+1}} + \underbrace{u_{j-1,0}}_{\varepsilon(-1)^{j-1}})$$

$$= \varepsilon(-1)^j(1-2s-s-s) = \varepsilon(-1)^j(1-4s).$$

Jatkamalla $\Longrightarrow$

$$u_{j,n} = \varepsilon(-1)^j(1-4s)^n.$$

$|u_{j,n}| \to \infty$, kun $n \to \infty$, jos $|1-4s| > 1$.

Siis oltava $|1-4s| \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq s \leq \frac{1}{2}$

Ts. $\frac{k\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$; $\boxed{\Delta t \leq \frac{1}{2k}\Delta x^2}$

Aika - askel tolkuttoman pieni.
Menetelmän käyttökelpoisuus hyvin rajallinen.