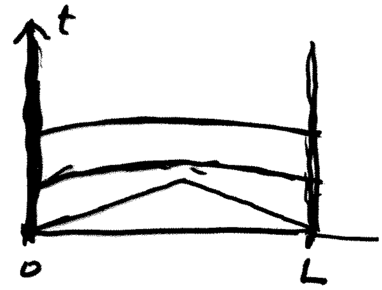
Luento 6, 1.3.05

[T-W] Ch 3, 4
[Coo] Ch 3, 4
[KRE8] 11.5

Lämpöyhtälö, anal. ja num.

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = f(x), \quad \text{AE} \end{cases}$$

Dirichlet'n RE:t



$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

([T-W]: ssä: $L = 1$, $c = 1$
[Coo]: ssa : $c^2 = k$)

Muuttujien erottelulla:

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\lambda_n^2 t}, \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}, \; n = 1,2,\ldots \\ b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx \\ & \text{(} f\text{:n sinisarjan kertoimet)} \end{aligned}}$$

"Formal solution". Sekä [T-W] että [Coo] esittävät myös perustelun.

Neumannin RE:t

Eristetyt päät: $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$

Nyt om. arvot $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$, $n = \underline{0}, 1, 2, \ldots$

(Myös $\lambda_0 = 0$ on om. arvo)

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\lambda_n^2 t},$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

$$\left(\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}\right)$$

3.7 Energia-argumentit ([T-W])

Kvalitatiivisen analyysin välineitä:

- Energia-argumentit
- max-periaate

$$(*)\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0,1), \ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} c = 1 \\ L = 1 \end{bmatrix}$$

Ol: u, u_t, u_{xx} jatk. ja u rat $(*)$:n.

Olk. $E(t) = \int_0^1 u(x,t)^2\,dx, \quad t \geq 0$

$$E'(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)^2\,dx = \int_0^1 2u(x,t)\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{u_{xx}}\,dx$$

OSINT

$$= 2\underbrace{\Big/_{0}^{1} u(x,t)\,u_x(x,t)}_{0} - 2\int_0^1 u_x(x,t)^2\,dx$$

$$< 0$$

[Sekä Dir että Neu]

Siis $E(t) \searrow$, joten $E(t) < E(0)$.

Ts. $\displaystyle\int_0^1 u(x,t)^2\,dx \le \int_0^1 u(x,0)^2\,dx = \int_0^1 \phi(x)^2\,d$

$\forall t \geq 0$.

$\Rightarrow$ Thm 3.1 s. 104.

Stabiilisuus ja yksikäsitteisyys

Cor 3.1. Lämpöyhtälön (*) ratkaisut u_1 ja u_2, jotka vastaavat AA-funktioita ϕ_1 ja ϕ_2, toteuttavat stabiilisuusehdon

$$\int_0^1 (u_1 - u_2)(x,t)^2\,dx \le \int_0^1 (\phi_1 - \phi_2)(x)^2\,dx.$$

Erit. ratkaisu on korkeintaan yksikäs.

Tod: $w = u_1 - u_2$ tot. RE:t ja

AE:n $w(x,0) = \phi_1 - \phi_2$.

Lineaarisuus $\Rightarrow$ $w_t = w_{xx}$

$$\Rightarrow \int_0^1 (u_1 - u_2)^2(x,t) \le \int_0^1 (\phi_1 - \phi_2)^2(x)\,dx.$$

Erit., jos $\phi_1 = \phi_2$, niin $(u_1 - u_2)(x,t) = 0$ $\forall x\ \forall t$.

$\square$

Huom! Void. soveltaa myös joihinkin epälineaarisiin ... Kts. ss. 105 – 106.