2.4 Ominaisarvoprobleemat

2.4.1. Jatkuva om. arvoteht.

$$Lu = \lambda u \quad , \quad u \neq 0$$

Tässä $u \in C_0^2(0,1)$, $Lu = -u''$

L pos. def $\Longrightarrow$ $\lambda > 0$; merk. $\beta = \sqrt{\lambda} > 0$

Om. arvoteht. siis :

$$u'' + \beta^2 u = 0$$

"Tavanomaiseen tapaan" $\Longrightarrow$

yl. ratk. $u(x) = c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x$,

$u(0) = 0 \Longrightarrow c_1 = 0$; $u(1) = 0$ $\Big\} \Longrightarrow \beta = k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$

$\Longrightarrow$

Lemma 2.7. Ominaisarvot : $\lambda_k = (k\pi)^2$
Ominaisf:t : $\sin(k\pi x)$,
$k = 1, 2, \ldots$. $\square$

(Huom ! $k = 0$ ei , koska $\Longrightarrow u \equiv 0$
$k < 0$ aiheuttaa vain kertoimen -1)

Merkittävää on ominaisfunktioiden ortogonaalisuus.

Lemma 2.8. Ominaisfunktiot

$u_k(x) = \sin k\pi x$ ovat ortog. :

$$\langle u_k , u_j \rangle = \frac{1}{2} \delta_{kj} .$$

Tod: Ortogonaalisuus seuraa operaattorin L symmetrisyydestä:

$$\lambda_k \langle u_k, u_m \rangle = \langle L u_k, u_m \rangle = \langle u_k, L u_m \rangle$$
$$= \lambda_m \langle u_k, u_m \rangle$$

$$k \neq m \Rightarrow \lambda_k \neq \lambda_m \Rightarrow \langle u_k, u_m \rangle = 0.$$

Kts. myös $\boxed{\text{L4. muos}}$ $\square$

2.4.2. Diskreetti ominaisarvotehtävä

$$L_h v = \mu v \quad , \quad v \in D_{h,0} \quad , \quad v \neq 0.$$

$\Leftrightarrow$

$$-\frac{1}{h^2}\left(v(x_{j-1}) - 2v(x_j) + v(x_{j+1})\right) = \mu v(x_j)$$
$$j = 1, \ldots, n$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Kyseessä on siis matriisin A omA-v-teht.

Siis LRT om. vektoreita on tasan n kpl. (symmetria), om. arvoja $\leq n$ kpl.

Jatkuva om. arvoteht: $v(x) = \sin \beta x$, missä $\beta = k\pi$.

Luonnollinen arvaus: $v(x_j) = \sin(\beta x_j)$.

No katsotaan!

Olk. siis $v(x_j) = \sin \beta x_j$

(Merk. $x_j = x$)

$$(L_h v)(x) = -\frac{1}{h^2}(v(x+h) - 2v(x) + v(x-h))$$

$$= -\frac{1}{h^2}(\underbrace{\sin\beta(x+h)} - 2\sin\beta x + \underbrace{\sin\beta(x-h)})$$

Sievennys: L4. muos $\longrightarrow 2\sin\beta x \cos\beta h$

$[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta]$

$$\Rightarrow (L_h v)(x) = \frac{2}{h^2}\underbrace{\sin\beta x}_{v(x)}\underbrace{(1-\cos\beta h)}_{2\sin^2\frac{\beta h}{2}} \quad (*)$$

Siis $v_k \in D_{h,0}$,

$v_k(x_j) = \sin k\pi x_j$, $j = 1, \dots, m$

ovat om. vektoreita ja

$\mu_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2}$ vast. om. arvot.

Jaksollisuuden perusteella nähdään, että erillisiä om. arvoja on todellakin vain m kpl, lisäksi:

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m < \frac{4}{h^2}.$$

Siten erit. matriisin $\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & & & \\ & - & - & -1 \;\; 2 \end{bmatrix}$

om. arvot ovat välillä $(0, 4)$

(vrt. Harj. 1, teht. 6(c))

* Tämä lasku toimii mille tahansa β. Miksi rajoitus $\beta = k\pi$? No koska vaatimus: $v \in D_{h,0}$ eli oltava $v(1) = 0$.

Saatiin/saadaan:

Lemma 2.9. Diskreetin tehtävän

$$L_h v = \mu v \,, \quad v \in D_{h,0}$$

ominaisarvot ovat

$$\mu_k = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2}\right), \quad k = 1, \ldots, n$$

ja vast. om. vektorit (funktiot):

$$v_k(x_j) = \sin(k\pi x_j), \quad j = 1, \ldots, n; \quad k = 1, \ldots, n.$$

Lisäksi ominaisvektorit ovat ortog:

$$\langle v_k, v_m \rangle_h = \frac{1}{2} \delta_{km}$$

Tod: Alkuosa jo tehtiin.
Ortogonaalisuus seuraa L_h:n symmetrisyydestä.
$\langle v_k, v_k \rangle_h = \frac{1}{2}$ on sopiva harj. teht. (joko käsin tai Maplella).

$\square$

Fourier-esitys funktiolle $g \in D_{h,0}$

Koska $\dim(D_{h,0}) = n$, niin om. vektorit $v_1, \ldots, v_n$ muodostavat $D_{h,0}$:n ortogonaalisen kannan.

$$g \in D_{h,0} \Rightarrow g = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k .$$

Tavalliseen tapaan :

$$\langle g, v_m \rangle_h = \sum_{k=1}^{n} c_k \underbrace{\langle v_k, v_m \rangle_h}_{\delta_{km}} = \frac{1}{2} c_m$$

Siis $\boxed{g(x_j) = \sum_{k=1}^{n} 2 \langle g, v_k \rangle_h \sin(k\pi x_j) .}$

Äärellinen Fourier-esitys

Voidaanko mielivaltainen $f \in C[0,1]$ esittää vastaavasti sarjana :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\pi x).$$

$$c_k = 2 \langle f, u_k \rangle = 2 \int_0^1 f(x) \sin(k\pi x) dx .$$

Tässäpä historiallinen kysymys! Nyt tiedämme enemmän kuin Fourier 200 v. sitten: Tarvitaan (lievä) lisäehto.