2.3 Jatkuvan ja diskreetin ratkaisun ominaisuuksia

Miten jatkuvan ongelman ratkaisun ominaisuudet siirtyvät diskreettiin ratkaisuun. (Miten hyvin diskreetti matkii jatkuvaa.)

2.3.1 Differentiaali- ja differenssioperaattorit

Hyvin notaatio vie pitkälle, kunhan niin samalla aukeaa mikä on usein yleisempään.

Jatk.

Merk. $(Lu)(x) = -u''(x)$

RA - tehtävämme :

Annettu $f \in C[0,1]$, etsittävä $u \in C_0^2(0,1)$ s.e. $Lu = f$.

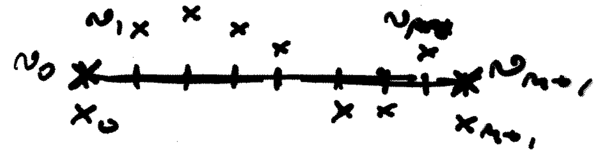
Diskreetti tapaus

D_h = { Pisteissä $x_0, \ldots, x_{n+1}$ määritellyt (diskreetit) funktiot }.

Funktion $v \in D_h$ arvoa x_j:ssä merk. usein $v_j = v(x_j)$

(D_h voidaan samaistaa $\mathbb{R}^{n+2}$:n kanssa.)

$$D_{h,0} = \{ v \in D_h \mid v_0 = v_{m+1} = 0 \}$$



Differenssioperaattori L_h.

Olk. v mieliv. funktio, joka on määritelty pisteissä $x_0, \ldots, x_{m+1}$

(Ei haittaa, vaikka v olisi määritelty koko välillä $[0,1]$.)

Määr:

$$(L_h v)(x_j) = -\frac{1}{h^2}\big(v(x_{j+1}) - 2v(x_j) + v(x_{j-1})\big),$$

$$j = 1, \ldots, m.$$

Siis $L_h v$ on joukossa $\{x_1, \ldots, x_m\}$ määr. diskr. fkt,

Diskreetti tehtävä:

Annettu $f(x_j)$, $j = 1, \ldots, m$.

Määritä $v \in D_{h,0}$ s.e.

$$(L_h v)(x_j) = f(x_j), \quad j = 1 \ldots m.$$

Sisätulo

1) Jatk.: $\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx$

2) Diskr.: $\langle u, v \rangle_h = h\left(\frac{1}{2}(u_0 v_0 + u_{m+1} v_{m+1}) + \sum_{j=1}^{m} u_j v_j\right)$

$(u, v \in D_h)$ (Trapetsisääntö)

2.3.2 Operaattorien L ja L_h symmetrisyys

Muista: Matriisi A on symm. $(A^T = A)$
$\iff \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \quad \forall x, y$.
Operaattorille tämä on määritelmä.

Lemma 2.2. L on symmetrinen:
$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle \quad \forall u, v \in \underline{C_0^2(0,1)}.$$

Tod: Osittaisintegrointi, kts. [T-W] s. 59. $\square$

Huom! O-RE:t oleellisia, jotta $-\Big/_0^1 u'(x)v(x) = 0$, ja vast. ...

Diskreetissä tapauksessa tarvitsemme "osittain summausta", joka ei ole samalla tavoin tunnettu kuin osit. int.

Os. int. johdetaan tulon derivoimis-kaavasta $(uv)' = u'v + v'u$ integroimalla.

Kirjoitetaan vastaava tulon differenssikaava:

$$y_{j+1} z_{j+1} - y_j z_j = (y_{j+1} - y_j) z_j + (z_{j+1} - z_j) y_{j+1}$$
$$(= (\Delta y) z + (\Delta z) y)$$

$$\sum_{j=0}^{m} (\underbrace{y_{j+1} z_{j+1}}_{w_{j+1}} - \underbrace{y_j z_j}_{w_j}) = (w_1 - w_0) + (w_2 - w_1) + \dots + (w_{m+1} - w_m)$$
(merk.)
$$= w_{m+1} - w_0 \quad \text{[Teleskooppi]}$$

Siis

$$y_{n+1} z_{n+1} - y_0 z_0 = \sum_{j=0}^{n} (y_{j+1} z_{j+1} - y_j z_j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (y_{j+1} - y_j) z_j + \sum_{j=0}^{n} (z_{j+1} - z_j) y_{j+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{j=0}^{n} (y_{j+1} - y_j) z_j = y_{n+1} z_{n+1} - y_0 z_0 - \sum_{j=0}^{n} (z_{j+1} - z_j) y_{j+1}}$$

$$\left(\sum_j (\Delta y_j) z_j = \Big/_{0}^{n+1} y_j z_j - \sum_j (\Delta z_j) y_{j+1} \right)$$

$$\left[\text{Vrt. } \int z\,dy = \Big/ zy - \int y\,dz \right]$$

Differenssioper.: $(\Delta w)_j = w_{j+1} - w_j$

<u>Operaattorin L_h symmetrisyys</u> (2.3.2. s. 59–

Homma käy kätevästi, kun lausutaan L_h differenssioperaattorin Δ avulla.

$$(L_h w)(x_j) = -\frac{1}{h^2}\left(w(x_{j+1}) - 2w(x_j) + w(x_{j-1}) \right.$$

$$j = 1, \dots, n$$

Usein on kätevää ajatella, että $D_{h,0}$ koostuu kaikista $\mathbb{Z}$:ssa määritellyistä funktioista w, joille $w(j) = 0$, kun $j \le 0$ tai $j \ge n+1$.

Lausutaan $L_h : D_{h,0} \to D_{h,0}$ differenssioperaattorin Δ avulla, $\Delta w = w_{j+1} - w_j$

$$\Delta^2 w_j = \Delta\Delta w_j = \Delta w_{j+1} - \Delta w_j$$
$$= w_{j+2} - w_{j+1} - (w_{j+1} - w_j) =$$
$$= w_{j+2} - 2w_{j+1} + w_j \, .$$

Siten:

$$(L_h w)_j = -\frac{1}{h^2}(w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}) = -\frac{1}{h^2}(\Delta^2 w)_{j-1}$$
$$j = 1, \ldots, m \, .$$

<u>Lause 2.3.</u> $L_h : D_{h,0} \to D_{h,0}$ on symm.

<u>Tod</u>: Osoitettava siis:

$$\langle L_h u, v\rangle = \langle u, L_h v\rangle \quad \forall u, v \in D_{h,0}$$

$D_{h,0}$:n sisätulo: $\langle u, v\rangle_h = h \sum_{i=1}^m u_i v_i$

(h:lla ei ole tässä merkitystä, mutta olkoon mukana.)

$$\langle L_h u, v\rangle = -\frac{1}{h}\sum_{j=1}^m \underbrace{\Delta^2 u_{j-1}}_{\Delta \underbrace{\Delta u_{j-1}}_{y_j}} \underbrace{v_j}_{z_j}$$

voidaan ottaa $\sum_{j=0}^m$ $(v_0 = 0)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Os. summaus:}\\ \displaystyle\sum_{j=0}^m (\Delta y_j) z_j = \Big/_{0}^{m+1} y_j z_j - \sum_{j=0}^m (\Delta z_j) y_{j+1}\end{array}}$$

$$= 0 + \frac{1}{h}\sum_{j=0}^m \Delta v_j \, \Delta u_j \, .$$

Tilanne on v:n ja u:n suhteen symmetrinen, joten roolit vaihtamalla saadaan sama tulos, kun lasketaan $\langle u, L_h v\rangle$! $\square$

Lemma 2.4. (s. 60) L ja L_h ovat pos. def.:

$$L : C_0^2(0,1) \to C_0^2(0,1)$$

$$L_h : D_{h,0} \to D_{h,0}$$

t.s. $\langle Lu, u\rangle \geq 0$, $\langle L_h u, u\rangle \geq 0$ $\forall u$,

$= 0 \iff u = 0$.

Tod: (1) $u \in C_0^2(0,1)$.

$$\langle Lu, u\rangle = -\int_0^1 u''(x)u(x)\,dx =$$

$$\underbrace{-\Big/_{\!0}^{1} u'(x)u(x)}_{0,\ \text{koska } u \in C_0^2(0,1)} + \int_0^1 u'(x)^2\,dx \geq 0$$

Jos $= 0$, oltava $u'(x) \equiv 0 \Rightarrow u \equiv$ vakio $= 0$, koska $u \in C_0^2(0,1)$.

(2) L 2.3 todistuksesta:

$$\langle L_h u, v\rangle = \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{m} \Delta u_j \Delta v_j .$$

Siis $\langle L_h v, v\rangle = \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{m} (\Delta v_j)^2 \geq 0$.

$= 0 \Rightarrow \Delta v_j = 0$, $j = 0, 1, \ldots, m$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_m = v_{m+1} = 0 \\ v_{m-1} = v_m = 0 \\ \vdots \\ v_1 = v_2 = 0 \\ v_0 = 0 \ \text{(d.)} \end{array}\right\} \Rightarrow v = 0.$$

$\square$

2.3.3 <u>yksikäsitteisyys</u>

$$Lu = f \qquad f \in C[0,1],\ u \in C_0^2(0,1)$$

Ratkaisun 1-kis. saatiin suoraan ratkaisemalla

(Jos u on ratkaisu, niin sen on oltava ...)

$$L_h u = f \quad . \quad \exists_1 \text{ ratk} \iff \exists A^{-1}.$$

Tätä ei vielä perusteltu.

<u>Ratkaisujen 1-käsitteisyys</u> seuraa yleisesti seikasta, operaattorin pos. definiittisyydestä.

<u>Lemma 2.5</u> Jos $L : F_1 \to F_2$ on lineaarinen operaattori joidenkin funktioavaruuksien F_1 ja F_2 välillä, niin L pos. def. $\Longrightarrow$ yhtälön $Lu = f$ ratkaisu on "korkeintaan yksikäsitteinen".

<u>Tod</u>: Olk. u_1 ja u_2 ratkaisuja

$$\Longrightarrow L(\underbrace{u_1 - u_2}_{e}) = Lu_1 - Lu_2 = f - f = 0$$

$$\langle Le, e \rangle = 0 \underset{\text{(pos. def.)}}{\Longrightarrow} e = 0 \,. \qquad \square$$

(Pos. def. lin. operaattori on injektio)

$\square$

Diskreetin probleeman ratkaisu

(2.3.4 A max principle ...)

Jatkuvan probl. ratk. :

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y) dy ,$$

$$G(x,y) = \begin{cases} y(1-x), & 0 \le y \le x \\ x(1-y), & x \le y \le 1 \end{cases}$$

Pyritään vastaavanlaiseen esitykseen diskreetin ongelman tapauksessa.
"Diskretoidaan" Greenin funktio :

Kiinnitetään $x_k = kh$ ja tarkast. (diskreettiä) funktiota

$$G^k(x_j) = G(x_j, x_k) \text{ , ts.}$$

$$G^k = G(\cdot, x_k) \qquad [\text{rcurry}(G, x(k))]$$

$$(L_h G^k)(x_j) = -\frac{1}{h^2}\left(G(x_{j+1}, x_k) - 2G(x_j, x_k) + G(x_{j-1}, x_k)\right)$$

Helppo lasku
kts. L3.mws
$$\begin{cases} L_h G^k(x_j) = 0, & \text{kun } j \neq k \\ L_h G^k(x_k) = \frac{1}{h} \end{cases}$$

Ortogonaalisuus haa !

$$\text{Ts.} \quad L_h G^k = \frac{1}{h} e^k = \frac{1}{h} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array}$$

Tehtävän $L_h w = f$ ratkaisu w saadaan esitetyksi kantafunktioiden G^k avulla kuden kääntee[s]sä :

Annettu $f \in D_{h,0}$, määritetään $w \in D_{h,0}$ s.e.

$$L_h w = f .$$

$$f = \sum_{k=1}^{m} f_k e^k . \qquad (\text{merk. } f_k = f(x_k))$$

Olk. $w = h \sum_{k=1}^{m} f_k G^k$, tällöin:

$$L_h w = h \sum_{k=1}^{m} f_k \underbrace{L_h G^k}_{\frac{1}{h} e^k} = f .$$

Siis ratk. $\boxed{w = h \sum_{k=1}^{m} f(x_k) G^k}$

<u>Huom!</u> Saatiin uusi todistus diskr. probl.:n ratkaisun olemassaololle ja 1-käs.:lle.
(Koska jokaisella oikealla puolella f $\exists$ ratk., niin diskretointimatriisilla A on täysi rangi $\Rightarrow$ $\exists_1$ ratk.)

Monotonisuus ja max-periaate

Kirjoitetaan ratk. koord. muodossa.

$$w(x_j) = h \sum_{k=1}^{m} f(x_k) G(x_j, x_k) .$$

(Mieluummin: $h \sum_{k=1}^{m} G(x_j, x_k) f(x_k)$

$$= h \left[G(x_j, x_k) \right] \begin{bmatrix} f_0 \;(0) \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{m+1} \;(0) \end{bmatrix}$$

Hm, tässähän meillä on A^{-1}:n kaava!
Voisi hyvin vaikka generoida Maplella
Sinänsä kaava ei liene käytännön laskuihin hyödylli…

Normi D_h : ssa :

$$\|v\|_{h,\infty} = \max_{j=0..n+1} |v(x_j)|$$

($D_h = \ell_\infty^{n+2}$) (Aiemmin E_h)

Prop. 2.6. Diskreetin tehtävän $L_h v = f$ ratk. $v \in D_{h,0}$ toteuttaa ey:n

$$\|v\|_{h,\infty} \le \frac{1}{8}\|f\|_{h,\infty} .$$

Tod. $v(x_j) = h \sum_{k=1}^{n} G(x_j, x_k) f(x_k)$

$$\Rightarrow |v(x_j)| \le \|f\|_{h,\infty} \underbrace{\underbrace{h \sum_{k=1}^{n} G(x_j, x_k)}_{\frac{1}{2} x_j (1 - x_j)}}_{\le \frac{1}{8}}$$ (L3.maws) $\square$

Unohtui :

Prop 2.5 $f \ge 0$, $v \in D_{h,0}$; $L_h v = f$.
Tällöin $v(x_j) \ge 0 \quad \forall j = 1 .. n$.

Tod : $v(x_j) = h \sum_{k=1}^{n} \underbrace{G(x_j, x_k)}_{\ge 0} \underbrace{f(x_k)}_{\ge 0} \ge 0$. $\square$

Ennen Prop. 2.6 : tta tarvitaan kaavaa:

$$h \sum_{k=1}^{n} G(x_j, x_k) = \frac{1}{2} x_j (1 - x_j) .$$

Ts. osoitettava, että jos $v(x_j) = \frac{1}{2} x_j (1 - x_j)$, niin ~~diskr. tehtävän ratk.~~

$L_h v = 1$. Suora lasku, hanska tehdä Maplella (L/L3.maws)

sivun alkuun

2.3.5 Diskreetin ratkaisun suppeneminen

Suppeneeko ja onko virhekäytös $O(h^2)$?

Määr. 2.2 Olk. $f \in C[0,1]$, $u \in C_0^2(0,1)$ yhtälön $Lu = f$ ratk.
Määr:
$$\tau_h(x_j) = (L_h u)(x_j) - f(x_j)$$
"truncation error" ("katkaisuvirhe", tavallisesta poikkeava nimitys NA:ssa.)
Tällaista suuretta yleensä "residuaaliksi", toisin: τ_h mittaa sitä, kuinka hyvin tarkka ratkaisu toteuttaa diskreetin tehtävän.

Diskreetti menetelmä on konsistentti diff.yhtälön (RA-tehtävän) kanssa, jos
$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h\|_{h,\infty} = 0 .$$

Lemma 2.6. Olk. $f \in C^2[0,1]$. Tällöin
$$\|\tau_h\|_{h,\infty} \le \frac{\|f''\|_\infty}{12} h^2 .$$

Tod: Differenssimenetelmän johdosta saatiin
$$\underbrace{\frac{1}{h^2}\left(u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)\right)}_{-(L_h u)(x)} = \underbrace{u''(x)}_{-f(x)} + E_h(x),$$
missä $|E_h(x)| \le \dfrac{M_u h^2}{12}$,
$$M_u = \max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)| .$$

$$\Rightarrow |(L_h u)(x_j) - f(x_j)| = |E_h(x_j)|$$

$$\leq \frac{\|u^{(4)}\|_\infty}{12} h^2 = \frac{\|f''\|_\infty}{12} h^2 . \quad \square$$

Nyt vain poimitaan kypsät hedelmät
→ supremumnormilause ja virhearvio

<u>Lause 2.2</u> [Theorem 2.2. s. 65] Olk. $f \in C^2[0,1]$.
Olk. u jatk. probl. $Lu = f$ ratk. ja
v diskr. probl. $L_h v = f$ ratk.

Tällöin
$$\|u - v\|_{h,\infty} \leq \frac{\|f''\|_\infty}{96} h^2 .$$

<u>Tod</u>: Merk $\varepsilon(x_j) = u(x_j) - v(x_j)$, $j = 1 \dots m$.
(diskreetti virhefunktio)

$$L_h \varepsilon = L_h u - \underbrace{L_h v}_{f_h = (f(x_1), \dots, f(x_m))} = L_h u - f_h = \tau_h$$

Siis ε tot. diskr. yhtälön $L_h \varepsilon = \tau_h$,
joten max-periaate (prop. 2.6) $\Longrightarrow$

$$\|\varepsilon\|_{h,\infty} \leq \frac{1}{8} \|\tau_h\|_{h,\infty} \leq \underbrace{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{12}}_{96} \|f''\|_\infty h^2$$

$\square$