2.1.2. Ratkaisun sileys

(Tässä on pientä sekoilua kirjassa.)

$C[0,1] = \{$ Sulj. väl. $[0,1]$ jatk. fkt. $\}$

$C_0^2(0,1) = \{ g \in C^2(0,1) \cap C[0,1] \mid g(0) = g(1) = 0 \}$

yhtälö: $-u'' = f$, $u(0) = u(1) = 0$.

Thm 2.1 Annettu $f \in C[0,1]$, edellä lasketun perust. $\exists_1$ ratk. $u \in C_0^2(0,1)$;

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y)\, dy$$

Ilmiselvästi: Ratkaisu u on sileämpi kuin "data" f.

$$f \in C \Rightarrow u \in C^2.$$

Thm 2.1:ssä: $f \in C(0,1) \Rightarrow \exists_1\, u \in C_0^2(0,1)$ s.e. ...

Tämä ei kyllä pidä paikkaansa!

Exa 2.3:ssa demonstroidaan sitä, että jos $f \notin C[0,1]$, niin voi silti olla ratk. u, mutta se ei ole derivoituva reunoilla. Esim. on $f(x) = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow u(x) = -x \ln x$.

Kyllähän näin on, mutta entä jos otetaan vaikka $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Silloin saataisiin $u(x) = \ln x + \dots$, eikä RE:stä $u(0) = 0$ voida puhua!

Rajoitutaan tapaukseen $f \in C[0,1]$ ja käsitellään tarpeen mukaan singulaarisuuksia erikseen

2.1.3. Maksimiperiaate

Integraaliesityksestä ja Greenin funktion ominaisuuksista saadaan u:n ominaisuuksia, kuten :

Monotonisuus : $f \geq 0 \implies u \geq 0$

"Maksimiperiaate": $\|u\| \leq M\|f\|$

Prop. 2.1. $f \geq 0 \implies u \geq 0$.

Tod : $u(x) = \int_0^1 \underbrace{G(x,y)}_{\geq 0} \underbrace{f(y)}_{\geq 0} dy \geq 0$. $\square$

Normi funktioavaruudessa $C[0,1]$.

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad \left(= \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \right)$$

⌈ Muitakin normeja voitaisiin käyttää, mutta tämä sopii hyvin ja sillä on helppo operoida. ⌋

Prop 2.2. Olk. $f \in C[0,1]$ ja u RA – tehtävän ratkaisu. Tällöin

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|f\|_\infty .$$

Tod : $$|u(x)| \leq \int_0^1 |G(x,y) f(y)| dy$$

$$\underset{(G \geq 0)}{\leq} \|f\|_\infty \int_0^1 G(x,y)\, dy = \frac{1}{8}\|f\|_\infty$$

```
> int(G(x,y), y=0..1);
```

$\frac{1}{2}x(1-x)$, max pist. $x = \frac{1}{2}$, arvo $= \frac{1}{8}$

2.2. Differenssiapproksimaatio

Taylor:

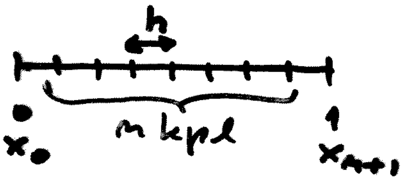
$$g(x+h) = g(x) + h g'(x) + \frac{h^2}{2} g''(x) + \frac{h^3}{3!} g'''(x) + \frac{h^4}{4!} g^{(4)}(\xi).$$

$$g(x-h) = g(x) - h g'(x) + \frac{h^2}{2} g''(x) - \frac{h^3}{3!} g'''(x) + \frac{h^4}{4!} g^{(4)}(\eta).$$

$$\Rightarrow \quad g(x+h) + g(x-h) = 2g(x) + h^2 g''(x) + \underbrace{\frac{2h^4}{4!} g^{(4)}(\zeta)}_{O(h^4)}$$

$$\Rightarrow \quad g''(x) = \frac{1}{h^2}\left(g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)\right) + O(h^2)$$

2.2.2 Lineaarinen yhtälösyst.



$m+1$ osaväliä
$m+2$ solmua
m sisäsolmua

$h = \frac{1}{m+1}$ Jokaisessa sisäsolmussa pitää

$$\begin{cases} -u''(x_j) = f(x_j), \quad j = 1..m. \\ \text{Reunasolmuissa oltava } \begin{cases} u(x_0) = 0 \\ u(x_{m+1}) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Korvataan kussakin sisäsolmussa 2. derivaatta differenssiapproksimaatiolla.
Merk. $v_j = u(x_j)$:n approksimaatio.

$$-\frac{1}{h^2}\left(v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1}\right) = f(x_j), \quad j=1..n$$

$$v_0 = v_{n+1} = 0$$

$$
\begin{array}{ll}
j=1: & \\
j=2: & \\
\vdots & \\
j=n: &
\end{array}
\left\{
\begin{array}{lr}
2v_1 - v_2 & = h^2 f(x_1) \\
-v_1 + 2v_2 - v_3 & = h^2 f(x_2) \\
 & \vdots \\
-v_{n-1} + 2v_n & = h^2 f(x_n)
\end{array}
\right.
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
2 & -1 & \cdots & & 0 \\
-1 & 2 & -1 & & \\
\vdots & & \ddots & & \\
 & & -1 & 2 & -1 \\
0 & \cdots & & -1 & 2
\end{bmatrix}}_{A}
$$

Tridiagonaalinen, symmetrinen

$$Av = b, \quad \text{missä } b_j = h^2 f(x_j)$$

⌐ Matriisi A saadaan Maplessa näillä ~~[illegible]~~ BandMatrix:lla.
Matlab:ssa diag(..) + diag(..) + diag(..).
Isoissa: spdiags

Esim 2.5 $\quad f(x) = (3x + x^2)e^x$.

Saadaan kätevästi Maplella anal. ratk. (Harj. tehd.)

Vast: $u(x) = x(1-x)e^x$.

Jätetään differenssimenetelmä ja vertailu anal. ratkaisuun (virhekäytös) harjoituksiin.

Tehdään sen sijaan luennolla Matlab:illa.
Samalla aktivoidaan Matlab-harrastus.

$\boxed{\text{L/L2.html}}$

2.2.3 Tridiag. syst. ratkaisu

Ei käsitellä, turvaudutaan valmiisiin ratkaisijoihin:

LinearSolve (Maple) , \ (Matlab)

Olemassaolon "diagonaalisesti dominantti". Mutta se seuraa myös pos. def:stä.

2.2.5 Posit. def. matriisit

Määr 01: A symmetrinen ($A^T = A$)
A on pos. def. , jos $\langle Av, v\rangle \geq 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n$
ja $= 0 \iff v = 0$.

(Sisätulo: $\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j = u^T v$

$$(\langle Av, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} (Av)_k v_k = v^T A v)$$)

Lause Symm. matr. A on pos. def $\iff$ A:n ominaisarvot > 0.

Tod: 1° Ol: A pos. def.

Olk. (λ, v) om.a, om.v – pari.

$$\underbrace{\langle Av, v\rangle}_{>0} = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \underbrace{\langle v, v\rangle}_{>0}$$

$$\Rightarrow \lambda > 0.$$

2° Ol: A:n kaikki om. arvot > 0.

A symm. $\Rightarrow$ $\exists$ ON om. vekt. kanta $\{e_1, \dots, e_n\}$. Olk. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vast. om. arvot.

Olk. $v \in \mathbb{R}^n$; $v = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$.

$$Av = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \lambda_i e_i.$$

$$\langle Av, v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \xi_i \lambda_i e_i , \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \right\rangle =$$

$$= \sum_{i,j} \lambda_i \xi_i \xi_j \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{>0} \xi_i^2 > 0$$

jos $v \neq 0$ ($\Rightarrow$ jokin $\xi_i \neq 0$)

$\square$

Erit: Jos A pos. def., niin $Ax = b$ – tehtävällä on 1-käs. ratk.
(Koska $Ax = 0$:lla vain triv. ratk., muuten $\lambda = 0$ olisi om. arvo.)

2.3 Jatkuvan ja diskreetin ratkaisun ominaisuuksia

Miten jatkuvan ongelman ratkaisun ominaisuudet siirtyvät diskreettiin ratkaisuun. (Miten hyvin diskreetti matkii jatkuvaa.)

2.3.1 Differentiaali- ja differenssi-operaattorit

Hyvin noteeraa nämä pitkille, kuten niin usein.
Samalla aukeaa mikä on yleisempään.

Jatk.

Merk. $(Lu)(x) = -u''(x)$

RA - tehtävämme:

Annettu $f \in C[0,1]$, etsittävä $u \in C_0^2(0,1)$ s.e. $Lu = f$.

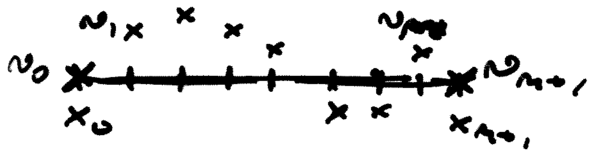
Diskreetti tapaus

$D_h = \{$ Pisteissä $x_0, \dots, x_{n+1}$ määritellyt (diskreetit) funktiot $\}$.

Funktion $v \in D_h$ arvoa x_j:ssä merk. usein $v_j = v(x_j)$

(D_h voidaan samaistaa $\mathbb{R}^{n+2}$:n kanssa.)

$$D_{h,0} = \{ v \in D_h \mid v_0 = v_{n+1} = 0 \}$$



Differenssioperaattori L_h.

Olk. v mieliv. funktio, joka on määritelty pisteissä $x_0, \dots, x_{n+1}$
(Ei haittaa, vaikka v olisi määritelty koko välillä $[0,1]$.)

Määr:

$$(L_h v)(x_j) = -\frac{1}{h^2}\big(v(x_{j+1}) - 2v(x_j) + v(x_{j-1})\big),$$

$j = 1, \dots, n$.

Siis $L_h v$ on joukossa $\{x_1, \dots, x_n\}$ määr. diskr. fkt,

Diskreetti tehtävä:

Annettu $f(x_j)$, $j = 1, \dots, n$.
Määritettävä $v \in D_{h,0}$ s.e.

$$(L_h v)(x_j) = f(x_j), \quad j = 1 \dots n.$$

Sisätulo

1) Jatk.: $\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx$

2) Diskr.: $\langle u, v \rangle_h = h\left(\frac{1}{2}(u_0 v_0 + u_{n+1} v_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n} u_j v_j\right)$
($u, v \in D_h$) (Trapetsisääntö)

2.3.2 Operaattorien L ja L_h symmetrisyys

Muista: Matriisi A on symm. ($A^T = A$) $\iff \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \quad \forall x, y$.

Operaattorille tämä on määritelmä.

Lemma 2.2. L on symmetrinen:

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle \quad \forall u, v \in C_0^2(0,1).$$

Tod: Osittaisintegrointi, kts. [T-W] s. 59. $\square$

Huom! 0-RE:t oleellisia, jotta $-\Big/_0^1 u'(x)v(x) = 0$, ja vast. ...

Diskreetissä tapauksessa tarvitsemme "osittain summausta", joka ei ole samalla tavoin tunnettu kuin ositt. int.

Os. int. johdetaan tulon derivoimis-kaavasta $(uv)' = u'v + v'u$ integroimalla.

Kirjoitetaan vastaava tulon differenssikaava:

$$y_{j+1}z_{j+1} - y_j z_j = (y_{j+1} - y_j)z_j + (z_{j+1} - z_j)y_{j+1}$$

$$\big(= (\Delta y)z + (\Delta z)y\big)$$

$$\sum_{j=0}^{m} (\underbrace{y_{j+1}z_{j+1}}_{w_{j+1}} - \underbrace{y_j z_j}_{w_j}) = (w_1 - w_0) + (w_2 - w_1) + \dots + (w_{m+1} - w_m)$$

(merk.)

$$= w_{m+1} - w_0 \quad \text{[Teleskooppi]}$$