Luento 10, to 31.3.

Cooper s. 132 →

$W \subset C^2[0, L]$ määritytty reunaehdoista

$M = -\frac{d^2}{dx^2}$ RE:t ovat symmetriset, mikäli M on symm. W:ssä, ts. $\langle Mw, z\rangle = \langle w, Mz\rangle \ \forall w, z \in W$.

Kaikki RE:t (4.29) – (4.34) ovat symm.

Ominaisarvot:

Esim. $w'(0) = w'(L) = 0$ (4.29):

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \to \infty$$

Kaikissa muissa:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \to \infty$$

Erilliset om. arvot $\Rightarrow$ 1-ulott om. avaruudet

symm. $\Rightarrow$ Om. vekt. ortog.

Voidaan osoittaa, että om. fkt. (φ_k) muodostavat täydellisen ortog. systeemin (vrt. Hilbertin kanta) $PC[0, L]$:ssä

piece wise continuous

Ts. jokaisella $f \in PC[0, L]$ on esitys

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n \qquad (L^2\text{-mielessä})$$

Ortog $\Rightarrow \langle f, \varphi_n\rangle = A_n \langle \varphi_n, \varphi_n\rangle$

$$\Rightarrow A_n = \frac{\langle f, \varphi_n\rangle}{\|\varphi_n\|^2} = \frac{\int_0^L f(x)\varphi_n(x)\,dx}{\int_0^L \varphi_n(x)^2\,dx}$$

[RR] Renardy - Rogers: An intro to PDE's; Springer -93

Kaikissa em. tapauksissa (4.29) – (4.34)

LY:n $\quad u_t = k u_{xx}, \quad u(x,0) = \phi(x)$

$\qquad\qquad + \text{RE:t } (4.29) \ldots (4.34)$

ratk. on muotoa

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x) \psi_n(t),$$

$$\psi_n(t) = e^{-\lambda_n k t} \qquad \left[\text{tap. } 4.29: \sum_{n=0}^{\infty}\right]$$

Yleisemmin: lämmönjohtavuus voi olla paikan funktio:

$$u_t(x,t) = \partial_x(k(x) u_x(x,t))$$

Tämä johtaa operaattorin $-\partial_x(k\partial_x)$ ominaisarvotehtävään, joka on tyyppiä "Sturm–Liouville-operaattori"

Hyvin luettava esitys näille:

[Boyce – DiPrima]: Elem. diff. eq & bdary value probls, Wiley.

Myös LH-kirja:

[Günther – Lee]: PDE's of Math. Phys. & Int. equ

[King – Billingham – Otto]: Diff. Equ, lin, non-lin, ord-, partial, Cambridge U.P. 2003

Hiukan avanseerattu, loistava tyyli.

Muista: Hyvä projekti: Kompleksianalyysin menetelmät (konformikuvaukset) lämpöyht.

4.4. Epähomog. probl. (s. 141)

Ensin: $u_t - k u_{xx} = q(x,t)$,

$u(x,0) = f(x)$, homog RE:t. (4.41)

(symm., pos.)

Oletetaan, että ratkaisu $u(x,t)$ ja lähdetermi $q(x,t)$ voidaan esittää muodossa

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\varphi_n(x)$$

$$q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\varphi_n(x),$$

missä φ_n:t ovat ko R-ehtoja vast. $-\frac{d^2}{dx^2}$:n ominaisfunktiot.

Ortog $\Rightarrow \langle q(\cdot,t), \varphi_n\rangle = q_n(t)\langle \varphi_n, \varphi_n\rangle$

$$\Rightarrow q_n(t) = \frac{\langle q(\cdot,t), \varphi_n\rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n\rangle} = \frac{\int_0^L q(x,t)\varphi_n(x)\,dx}{\int_0^L \varphi_n(x)^2\,dx}$$

Pyritään lausumaan kerroinfunktiot $u_n(t)$ kertoimien $q_n(t)$ avulla.
(tunnettujen)

$$u_t - k u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(u_n'(t)\varphi_n(x) - k\, u_n(t)\underbrace{\varphi_n''(x)}_{-\lambda_n\varphi_n(x)}\Big)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\big(u_n'(t) + \lambda_n k\, u_n(t)\big)\varphi_n(x)$$

$$\underset{\text{OLTAVA}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\varphi_n(x) \qquad \Longrightarrow$$

$$(*) \quad u_n'(t) + \lambda_n k u_n(t) = q_n(t), \quad n \in \mathbb{N}$$

Saatiin ODE - systeemi.

Alkuehdot saadaan kehittämällä AE - fkt.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x);$$

$$A_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle}$$

$$u(x,0) = \sum_n u_n(0)\varphi_n(x)$$

$$\Rightarrow \quad u_n(0) = A_n$$

$$\parallel$$

$$f(x) = \sum_n A_n \varphi_n(x)$$

Lin. 1. kl:n yhtälö $(*)$ vaid. ratkaista "vakioiden variointikeinolla":

$$u_n(t) = A_n e^{-\lambda_n k t} + \int_0^t e^{-\lambda_n k(t-s)} q_n(s)\,ds$$

Sij. tämä $u(x,t)$:n kaavaan:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\underbrace{A_n e^{-\lambda_n k t}}_{HY} + \underbrace{\int_0^t e^{-\lambda_n k(t-s)} q_n(s)\,ds}_{EHY}]\varphi_n(x)$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n k t}\varphi_n(x)$$

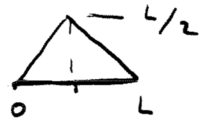
on HY:n $v_t - k v_{xx} = 0, \quad v(x,0) = f(x)$ ratk.

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\lambda_n k(t-s)} q_n(s)\,ds\right)\varphi_n(x)$$

on EHY:n $w_t - k w_{xx} = q, \quad w(x,0) = 0$ ratk.

Exa A   s. 144

$$u(0)=u(L)=0, \quad f(x)=0,$$

$$q(x,t)=e^{-t}\,r(x), \quad r(x)=$$ 

$$\varphi_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

HY - termi $= 0 \quad (A_n = 0)$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t e^{-\lambda_n k(t-s)}\,q_n(s)\,ds\right)\varphi_n(x)$$

$$q_n(s) = \frac{\langle q(\cdot,s),\varphi_n\rangle}{\|\varphi_n\|^2} =$$

$$= e^{-s}\frac{\langle r,\varphi_n\rangle}{\|\varphi_n\|^2} = e^{-s}\frac{4L}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\int_0^t q_n(s)\,e^{-\lambda_n k(t-s)}\,ds = \frac{4L}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}\,e^{-\lambda_n k t}\int_0^t e^{(\lambda_n k-1)s}\,ds$$

$$= \frac{4L}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}\,\frac{1}{\lambda_n k-1}\left(e^{-t}-e^{-\lambda_n k t}\right)$$

$\Rightarrow$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4L}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}\,\frac{1}{\lambda_n k-1}\left(e^{-t}-e^{-\lambda_n k t}\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{L}$$

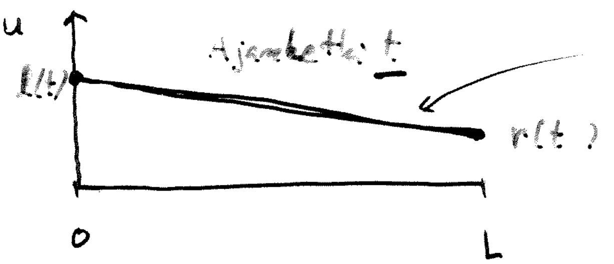
(Jos $\lambda_n k = 1$ jollain n, tulee vastaavasta integraalista pelkkä t)

Exa B Epähomog. Dirichlet'n RE:t

$$u_t = k\,u_{xx}, \quad u(x,0) = f(x)$$
$$u(0,t) = l(t), \quad u(L,t) = r(t)$$

Jotta ratk. voisi olla jatkuva, on oletettava yhteensopivuusehto: $f(0) = l(0)$, $f(L) = r(0)$.

Muunnetaan muotoon (4.41); sopivalla apufunktiolla nollataan RE:t, jolloin yhtälöön tulee lähdetermi.



$$g(x,t) = l(t) + \frac{x}{L}\left(r(t) - l(t)\right)$$

Olk. $v(x,t) = u(x,t) - g(x,t)$.

$$v(0,t) = l(t) - l(t) = 0$$
$$v(L,t) = r(t) - r(t) = 0$$

Homog. RE:t

$$v_t = u_t - g_t = \underbrace{k u_{xx}}_{= v_{xx}} - g_t = k v_{xx} - g_t$$

Lähdetermi

$$v(x,0) = u(x,0) - g(x,0) = f(x) - g(x,0)$$

AE

Olk. φ_n ja λ_n näitä R-ehtoja vastaavat ominaisfkt. ja -arvot, ts.

$$\varphi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Esitetään (kullakin kiinteällä t):

$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\,\varphi_n(x).$$

Derivoidaan termeittäin: (jokaista askelta ei nyt t:n suht. perustella tarkasti)

$$g_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'(t)\,\varphi_n(x)$$

Tehtävä on siten palautettu (4.41):een, missä $q = -g_t$, $q_n = -g_n'$

$$A_n = \frac{\langle \phi - g(\cdot,0),\, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle}$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[A_n e^{-\lambda_n k t} - \int_0^t e^{-\lambda_n k (t-s)} g_n'(s)\,ds \Big] \varphi_n(x)$$

$$u(x,t) = v(x,t) + g(x,t)$$

Jos $l(t) \equiv \alpha$, $r(t) \equiv \beta$, niin

$$g(x,t) = U(x) = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{L}\,x \;;$$

$g_t = 0$, joten $g_n' = 0 \;\; \forall n \implies$ integraalitermi $= 0$.

$$\implies u(x,t) = U(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n k t} \varphi_n(x).$$

$u(x,t) \to U(x)$, kun $t \to \infty$

"Steady state"

Void. os. helposti, että jos $\exists \lim l(t) = \alpha$, $\exists \lim r(t) = \beta$, niin ylläsanottu pätee.

([Co] s. 146: Ensin, jos $l(t) = \alpha$, kun $t \geq T$, $r(t) = \beta$, — " —
Sitten "slight extension of the argument".)