Teknillinen korkeakoulu — Apiola/Juntunen
Matematiikka

Mat-1.192 Numeerinen ja symbolinen laskenta kevät 2005
`http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/04/H/`

Laskuharjoitus 6 (viikko 12–13 , 31.3.)

```
http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/05/maple/ns05.mpl
http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/05/L/
http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/05/matlab/
http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/05/maple/
Cooper: Ch 4 ss. 111--153 (jaossa ti. 22.3.)
```

Vapautuaksemme Maple-Matlab-yhdistelmän "steady-state"-ongelmien mahd. aiheuttamista turhautumista, otamme nyt jo vakiintuneet välineet hyötykäyttöön. Dokumenttiosat ovat alla. Tarkoitus on, että kukin voisi peruspalikoista (kuten writedata) lähtien rakennella omia välineitään joustavasti.

Nämä käydään läpi ti 5.4

1. Arvioitaeesa lämpöyhtälön analyyttisen ratkaisun tarkkuutta summausrajan N funktiona, joudutaan pohtimaan alkuehtofunktion Fourier-sarjan suppenemisnopeutta. Se riippuu AA-funktion f sileydestä ja siitä, toteuttaako f myös reunaehdot.

   (a) Osoita (kahdella osittaisintegroinnilla), että jos $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ on C^2 (kaksi jatkuvaa derivaattaa), niin sinisarjan kertoimet ovat $O(\frac{1}{n^2})$. (Voit ottaa $L = \pi$.)

   (b) Osoita, että sama käytös saattaa syntyä lievemminkin oletuksin tarkastelemalla esimerkkiä. $f(x) = \begin{cases} x, & x \le L/2 \\ L - x, & x > L/2 \end{cases}$

   (c) Olkoon $f(x) = \sin(\frac{\pi x}{5})\, e^{x/2}$, välillä $[0, 10]$. Muodosta numeerisesti sinisarjan kertoimien jono (ainakin arvoon 50 saakka, ehkä jopa 100, kunhan jaksat vähän odottaa) funktion `siniSkertoimet` avulla. (Tätä tehtävää varten ei tarvitsis kirjoittaa tiedostoon, mutta kirjoitapa valmiiksi tehtävän 3 tarpeisiin.)

   Tutki kokeellisesti (a)-kohdan väitettä. Näyttääkö käytös pikemminkin jopa $O(\frac{1}{n^3})$−tyyppiseltä?

2. Olkoon sauvan pituus $L = 10$, lämpöyhtälössä 0- reunaehdot ja alkuehtona $f(x) = -\sin(\frac{\pi x}{5})\, e^{x/2}$

   (a) Muodosta Maple:lla analyyttinen ratkaisu. Huomaa, että `lamposin`-funktio on onnen omiaan, koska integroinnit eivät onnistu muuten kuin numeerisesti.

   (b) Luennolla (ti 22.3.) johdettiin virhekaava:

   $$|u(x,t) - u_{N-1}(x,t)| \le \max_{n \ge N} |b_n| \frac{\exp(-(\frac{N\pi}{L})^2\, t)}{1 - \exp(-N(\frac{\pi}{L})^2\, t)}$$

   Selvitä tämän arvion avulla, (a)-kohdassa laskettuja kertoimia hyödyntäen, miten monta termiä summaan kannattaa ottaa, jotta maksimivirhe olisi vaikkapa $\le 10^{-6}$, kun
   (1) $t \ge t_0$ ja (2) $0 \le t \le t_0$, missä t_0 on sopiva pieni aika-arvo (vaikkapa $t_0 = 0.1$). (Voit säädellä virhetoleranssia ja kynnysaikaa t_0 sopivammiksi tilanteen mukaan.)

3. Jatka edellistä tehtävää Matlab:ssa.
   Käytä edellä Maple:lla kirjoittamaasi kerroinvektoria hyväksesi `lamposin.m`-funktiossa. Laske analyyttinen ratkaisu ottamalla osasummaan termejä virhearvioiden mukaan. (Tarvitset luonnollisesti enemmän termejä, kun haluat tarkastella tilannetta pienillä t :n arvoilla.)

   Laske lisäksi numeerinen ratkaisu `CrNich.m`-funktiollamme ja vertaa analyyttiseen.

   Laske maksimivirhe, ja katso, miten sen käy ajan kasvaessa. Visualisoi.

4. Olkoon tällä kertaa alkuehtona $f(x) = 0$ ja reunaehtoina:
   $u(0,t) = \frac{t}{1+t} + te^{-\frac{t}{5}}$, $u(10,t) = 0$.

   (a) Muodosta ratkaisu `CrNich`-funktiolla ainakin ajanhetkeen $t = 10$ saakka, ehkä pitempäänkin. Näyttääkö siltä, että ratkaisut lähenevät ajasta riippumatonta, "steady-state"-ratkaisua.

   (b) Tutki reuna-arvofunktion raja-arvoa, kun $t \to \infty$. Päättele sen perusteella, mikä on tuo "steady state"-ratkaisu $U(x)$.

   (c) Totea aikasiivukuvista maksimiperiaatteen voimassaolo.

5. *Neumannin RE:t* Tarkastellaan lämpöyhtälöä sauvassa, jossa on eristetyt päät, ts. $u_x = 0$ sauvan päissä. Palauta mieleen ratkaisu

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^2 t}, \quad \lambda_n = \frac{c\, n\, \pi}{L} \quad (k = c^2).$$

(a) Muodosta analyyttinen ratkaisu, kun alkuarvofunktio $f(x) = \exp(-(x-5)^2)$. $L = 10, c = 1$. Voit mielellään ottaa mallia `siniSkertoimet` ja/tai `lamposin`-funktioista.

(b) Ratkaise tehtävä `pdepe`-funktiolla.
Malli: `http://www.math.hut.fi/opetus/numsym/05/matlab/pdelampoNeumann.m`
Päättele analyyttisen ratkaisun perusteella, mitä arvoa $u(x,t)$ lähenee, kun $t \to \infty$ ja selvitä, että numeerinen ratkaisu näyttää käyttäytyvän samoin.

6. Tarkastellaan lämpöyhtälöä reunaehdoin
$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) + h\, u(L,t) = 0$, missä $h > 0$.
Muuttujien erottelu johtaa $x-$ yhtälön osalta ominaisarvotehtävään

$$-X''(x) = \lambda X(x), \quad X'(0) = 0, \quad X'(L) + hX(L) = 0.$$

Tässä on merkitty $-\lambda$:lla muuttujanerotteluprosessin yhteistä vakiota.

(a) Osoita, että reunaehdot johtavat yhtälöön $\tan s = \frac{Lh}{s}$, missä $s = L\sqrt{\lambda}$. Ominaisarvot ovat siis muotoa $\lambda_n = (\frac{s_n}{L})^2$, missä s_n on tuon yhtälön ratkaisu. Ominaisfunktiot ovat muotoa $X_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}x$.

(b) Olkoon $L = 10$ ja $h = 1$. Määritä 10 ensimmäistä ominaisarvoa ja piirrä vastaavat ominaisfunktiot. Yhtälön numeeriseen ratkaisuun voit käyttää MAPLE-funktota `fsolve` tai MATLAB-funktiota `fzero`. Alkuarvot yhtälön numeeriselle ratkaisijalle valitaan kuvaa hyödyntäen.

(c) Kirjoita Maplella laskemasi ominaisarvot tiedostoon Matlab- jatkokäsittelymahdollisuutta varten.

Ohjeita, koodeja

Lämpöyhtälön analyyttiseen ratkaisuun tarvittavat Maple/Matlab-välineet ovat `ns05.mpl`-tiedoston `lamposin` sekä samanniminen MATLAB-funktio. Nämä ovat nyt *Fri Mar 18 16:13:42 EET 2005* sekä `www.../matlab`:ssa että `/p/edu/mat-1.192/`:ssa. (Kylläpä onkin vaikeaa pitää yllä monessa paikassa. Jos tuo polku sattuu lipsahtamaan vääräksi, ole ystävällinen ja vaihda se itse.)

```
function Z=lamposin(c,x,t,Lb)
% HA 18.3.05
%
% Lasketaan lämpöyhtälön u_t = c^2 u_xx sinisarjaratkaisu korkeusmatriisina
% Kutsu: U=lamposin(c,x,t,Lb)
% Input:
%        c:   c (Lämpöyhtälön c)  (vakio = c^2)
%        x:   x-pisteet
%        t:   aikapisteet
%        Lb:   Joko tiedoston nimi tai muuttuja Lb, jossa sauvan pituus ja
%              kertoimet muodossa [L,b1,b2,...]
%             ( Tyypillinen muoto 'Lb' tai Lb)
% Output: U -  lämpötilamatriisi, rivit ovat x:n, sarakkeet t:n pituisia.
% Huom! Jos kertoimet luetaan tiedostosta, on tarkistettava ja tarpeen
%       mukaan muutettava tiedostopolku ja nimi yhteensopivaksi sen kanssa,
%       jonne Maple-funktiolla 'siniSkertoimet' kirjoitettiin.
% Esim:
% clear; close all
%
% t=linspace(0,0.5,20); x=linspace(0,pi,50);
% U=lamposin(1,x,t,'HALb'); % b-kertoimet luetaan tiedostosta 'HALb'.
% surfc(x,t,U); colorbar % Pintapiirros
% figure
% plot(x,U)       % Lämpötilaprofiilit t-vektorin
%                 % ilmaisemilla ajanhetkillä.
```

```
lamposin:=proc(f,L,c,N,tiedosto)
description "Lämpöyhtälö u_t = c^2 u_xx, 0-RE't, u(x,0)=f(x)";
local b,lambda,x,t,n;
# Palautetaan osasummafunktio, jossa termit 1..N.
# Jos annetaan "tiedosto", kirjoitetaan /tmp/tiedosto:on [L,b1,b2,...,bN]
# Kirjoittamisen suorittaa siniSkertoimet. Jos haluat muuttaa polkua, editoi
#                           ^^tätä^^
# Esim:
# S1:=lamposin(x->x,1,1,10):
# S2:=lamposin(x->x,1,1,20,"b"):
# plot3d(S1(x,t),x=0..L,t=0..0.1)  # sama S2:lle.
```