Teknillinen korkeakoulu Apiola/Juntunen
Matematiikka

**Mat-1.192 Numeerinen ja symbolinen laskenta kevät 2005**
`http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/04/H/`

**Laskuharjoitus 3-4** (viikko 7-9 , 8.2.2004)

**Versio 3** ke 16.2.
- Tehdään 1,2,3 to 17.2. mennessä.
- Tehtävät 4–9 muodostavat harj4:n, ne kaikki to 3.3.
- Ehdotan, että vanha teht. 6 (jota ei tässä ole näkyvillä) siirrettäisiin mahd. myöhempään ajankohtaan. (Ei ole vaikea, mutta ehkä tällä kohdalla jää hiukan irralliseksi. Jos joku on sen ehtinyt tehdä, niin katsotaan, miten hyvitetään.)

Hiihtoloma pidetään viikolla 8. Ti 22.2. ei luentoa.
Neuvontaharjoitus to 24.2.

`http://www.math.hut.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/`
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/03/L/demo*.m` – Matlab skriptejä Fourier-sarjoihin
`http://www.math.hut.fi/teaching/p3/04/L/fourier.pdf` – Fourier-sarjojen perusteita, mukana Matlab-esimerkkejä. (Myös .ps)
`http://www.math.hut.fi/teaching/p3/04/L/Fsarjat1.html` Fourier-sarjojen perustyöarkki html-muodossa.
`http://www.math.hut.fi/teaching/p3/04/L/maple/Fsarjat.mws` Sama .mws-muodossa.
`http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/05/maple/ns05.mpl` Sisältää hyödyllisiä apufunktioita, kuten `JJ` (jaksollinen jatko).
`http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/05/L/Fouriersarjat.pdf` (lisätty 12.2.)

1. Piirrä [T-W]-kirjan s. 70 tyyliset kuvat jatkuvan ja diskreetin ominaisarvotehtävän ominaisfunktioista. Kirjoita skriptiksi, jossa voi helposti muuttaa parametria $n$. Piirrä siis joillakin isommillakin $n$:n arvoilla kaikki ominaisfunktiot. Saat valita, teetkö MAPLE:lla vai MATLAB:lla. (Mielellään molemmilla, mutta ei "velvoiteta".)

2. (a) Tutki kokeellisesti Lemman 2.9 (s. 70) todenmukaisuutta laskemalla myös "A-matriisin"ominaisarvot eri n:n arvoilla. (vrt. harj. 1 teht. 6 (c)).

   (b) Osoita tehtävän EXE 2.27 s. 80 väitteet oikeiksi sekä matemaattisesti että kokeellisesti. (Edellisessä saat toki käyttää MAPLE:a esim. sarjakehitelmään tai mihin vain. `limit`-komentoon ei kannata luottaa sokeasti, mieluummin vain testailuun.)

   Suorita "kokeelliset"osat sekä MAPLE:lla että MATLAB:lla. (Pidetään molemmat aktiivisina, se maksimoi riemun!)

3. Olkoon $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{kun } 1 < x < 2 \end{cases}$ .

   (a) Piirrä MAPLE:lla $f$ :n pariton ja parillinen 4−jaksoinen laajennus välillä $[-4, 4]$. Käytä funktiota `ParinenJ` ja `ParitonJ`) (tiedostossa `ns05.mpl`). Piirrä sitten jaksollinen laajennus ainakin kahden jakson pituisella välillä. Käytä `ns05.mpl`-tiedoston (erinomaista) funktiota `JJ`.

   (b) Muodosta sekä sini- että kosinisarja ja piirrä osasummia samaan kuvaan funktion kanssa.

   Vastaus (a)-kohtaan kertoimien osalta: $-2\,\frac{\cos(n\pi)-\cos(1/2\,n\pi)}{n\pi}$

4. .[T-W] EXE 3.1 s. 108 (kohdat a,b,c).

   Tee ainakin joku kohta MATLAB:lla (Kertoimet saat toki laskea MAPLE:lla.) Aiemmin sanotun kohdan ([T-W]) 3.3 sijasta uusi tehtävä 5 (jota kannattaa tehdä rinnan tämän tehtävän kanssa.)

5. Kirjoita MATLAB-funktiot (m-tiedostot) `sinisarja.m, kosinisarja.m, foursarja.m` vaikka tyyliin:

```
function summa=sinisarja(b,L,N,x)
% Lasketaan sinisarjan osasumma N vektorin x pisteissä.
% b -- kerroinvektori: annetaan vaikka inline-funktiona
% L -- Jakson puolikas
% N -- Trig. polynomin asteluku
% x -- Vektori, pisteet, joissa lasketaan.
..
summa=sum(...);
```

   Toinen mahdollisuus olisi antaa $b$ vektorina, jolloin voitaisiin sopia, että nollat ovat mukana. Silloin ei tarvittaisi argumenttia $N$. (Näin on tehty lopussa olevassa `lamposin`-funktiossa.)
   Funktio-tapa voisi olla selkeämpi ja helppokäyttöisempi.
   Kts. `help feval` ja ohje alla (sekä Higham–Higham Ch 10 ss. 125 – 127)
   Testaa funktioitasi ainakin joihinkin tehtävien 3 ja 4 esimerkkeihin.

6. Havainnollista *Gibbs'n* ilmiötä sopivalla omavalintaisella funktiolla. Muodosta kertoimet MAPLE:lla ja piirrä kuvat MATLAB:lla. (Toki on luonnollista piirtää myös MAPLE:lla. MATLAB:lla piirtäminen on paitsi hyödyllistä MATLAB- harjoittelua, myös selvästi tehokkaampaa. Gibbsin ilmiön demossa on mukava ottaa paljon pisteitä, mikä MAPLE:ssa alkaisi kuluttaa enemmän aikaa.) Ota mallia em. `demo*.m`-skripteistä. Tässä on hyvä tilaisuus kokeilla MAPLE:lla generoidun kerroinkaavan siirtämistä MATLAB:iin.
   **Lisäys 15.2:** Tee Fourier-sarjaprujun (alun linkkilistassa) s. 23 kohdan 4. tietokonetehtävän evästystä noudatellen.

7. Tutustu luentotyöarkkiin `heat_separ.mws` (sekä `www../L/`:ssä että `/p/edu/mat-1.192/`:ssa). Ratkaise lämmönjohtumistehtävät [T-W] s. 108 Exe 3.4.

8. Kirjoita edellistä modifioiden työarkki `lampoNeumann.mws` (edellinen olisikin voinut olla `lampoDirichlet`.) Ratkaise tehtävät Exe 3.5.

9. Tutustu tähän, peruskurssia K3 varten kirjoittamaani MATLAB-koodiin huolellisesti.
   `http://www.math.hut.fi/teaching/p3/04/L/matlab/lamposin.m`
   (Koodi mukana myös tehtäväpaperin lopussa.)

   Voit halutessasi tehdä siihen pikku muutoksiakin, kuten b-kertoimien antamisen funktiona vektorin sijasta, kuten Fourier:ssa ehdotettiin.

   Kirjoita vastaava `lampocos.m`

   Ratkaise ja visualisoi näiden avulla yksi edellä oleva (tai jokin muu) Dirichlet-tyyppinen ja yksi Neumann-tyyppinen lämmönjohtumistehtävä.

## Ohjeita

### Teht. 1

MATLAB:ssa voit jakaa grafiikkaruudun osiin `subplot`:lla. Toisaalta voit myös piirtää eri ikkunoihin komentamalla `figure` (seuraava) tai `figure(n)`. Piirrettävän datan voit kerätä matriisiin `for`-silmukan avulla sarake tai rivi kerrallaan. (Silmukkaa ei tehdä pitkin vektorin komponentteja — sellainen saa opettajat hyppimään seinille!)

Toisaalta voidaan myös tehdä ilman yhtään for-silmukkaa:

**Ulkotulo, sarake * rivi, meshgrid** Monissa yhteyksissä tarvitaan vektorien $x$ ja $y$ ulkotuloa, joka on matriisi $M$, missä $m_{ij} = x_i y_j$. Jos $x$ ja $y$ ovat vaakavektoreita, saadaan $M$ matriisitulona `M=x'*y`. Toinen tapa (esim)

```
>> x=linspace(0,1,8);
>> y=linspace(-1,1,5);
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> M=X.*Y;   % Katso:  X, Y, M
>> mesh(x,y,M); surf(x,y,M)  % Kokeile!
```

Huomaa: edellisessä matriisikertolasku `(*)`, jälkimmäisessä `(.*)`

Tällä voidaan korvata for-silmukka niin jatkuvassa kuin diskreetissäkin. (Jatkuva on Matlabin kannalta oikeasti myös diskreetti, pisteitä on vain enemmän.) Lue meshgridin käytöstä vaikka "pikku-oppaasta"tms. ja
`help meshgrid, help mesh, help surf, help contour`.

### Teht. 2

MATLAB:ssa komento `eig` laskee ominaisarvot (ja pyydettäessä myös vektorit).
`>> [V,D]=eig(A)` muodostaa "diagonalisoinnin", kts. `help eig`.

Jos haluat verrata kaavasta laskettuja ja eig:n antamia, niin ominaisarvojen muodostaman vektorin saat edellä olevasta D:stä: `diag(D)`.
Ominaisvektorit ovat matriisin $V$ sarakkeet. Tässä kaikki ominaisavaruudet ovat $1-$ulotteisia (miksi?). Jos käytössäsi on kaksi matriisia $(V, W)$, joiden sarakkeet koostuvat ominaisvektorikandidaateista samassa järjestyksessä, voit selvittää vertailun suorittamalla `V./W` (miksi). Ja vielä yksi "miksi": Niin siis miksi on tärkeää tämän toimivuudelle, että ominaisarvot ovat yksinkertaisia?

### Teht. 3

MATLAB-ratkaisussa voitaisiin vaikka MAPLE:n avulla muodostaa:

`b=inline('..','n')`   n on skalaari tai indeksivektori, käytä pisteoperaatoita tai funktiota `vectorize`.

Osasummia laskettaessa kannattaa muodostaa sarjan termien matriisi siten, että termi $n$ muodostaa rivin n (eri x:n arvoilla). Funktio `sum` laskee matriisin sarakesummien vektorin, joka antaa nyt osasumman $s_N$ laskettuna pisteissä $x_1, \ldots x_{100}$. (`sum` on esimerkki ns. vektorifunktiosta, muita ovat mm. `min, max`, .... (Kts. laajempaa opasta (kunhan korjaan linkit).) Esim:

```
x=linspace(-2,2);
N=10;
termit=zeros(N,length(x));
for n=1:N
   termit(n,:)=b(n)*sin(...);
end;
summa=sum(termit);
```

Huom! Tässäkin for-silmukka voidaan korvata ulkotulolla, kuten yllä. Tehokkuuden kannalta voi olla merkitystä, tässähän voidaan haluta laskea isoillakin N:n arvoilla (ainakin Gibbsissä).

Jos haluat osasummaparven, saat senkin samasta termimatriisista funktion `cumsum` avulla. Voit poimia jälkimmäisestä sopivasti osia.

## Teht. 5

Funktion välittäminen argumenttina MATLAB-funktiolle:
Esim (`[Hig-Hig]` Ch 10): Funktio `eros` palauttakoon parametrina annetun funktion $f$ erotusosamäärän: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ Voitaisiin kirjoittaa (tiedostoon `eros.m`) näin:

```
function y=eros(f,x,h)
y=(feval(f,x+h)-feval(f,x))/h;
```

Siis se, mikä kirjoitettaisiin istunnossa `f(x)`, kirjoitetaan funktion rungossa `feval(f,x)`. **Huom:** *Tämä koskee vain tapausta, jossa* `f` *esiintyy argumenttilistassa.*
Kutsuesim: `eros(@sqrt,1,0.1)` Kutsussa voi esiintyä *sqrt* :n paikalla yhtä hyvin oma m-tiedosto. (Myös `'sqrt'` toimii, mutta se alkaa näyttää ”vanhanaikaiselta”, muoto `@fun` on ns. ”function handle”, olisko vaikka ”kahva”, ja se on suositeltava.)

Korjaus harj.3 versioon 2: **inline-määrittelyn** tapauksessa ei kirjoiteta `@`-merkkiä. Esim:

```
b=inline('-2/pi*(cos(n*pi)-cos(n*pi/2))./n','n')
s=sinisarja(b,2,10,x);
```

Jos taas kirjoitetaan alla oleva m-tiedosto `bm.m`, on kutsuttava `s=sinisarja(@bm,2,10,x);` (Myös “vanhanaikainen” `s=sinisarja('bm',2,10,x);` toimii, mutta pelkkä `bm` ei.)

```
function kerroin=bm(n)
kerroin=-2/pi*(cos(n*pi)-cos(n*pi/2))./n;
```

(Vanhat versiot ($\leq 5$) ovat tässä suhteessa johdonmukaisempia, mutta uudet tehokkaampia.)

**Huomaa**, että yleisen F-sarjan osasumma on syytä kirjoittaa muodossa $a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L})$, eikä niin, että summataan ensin cos-termit ja sitten sin-termit. Periaatteessahan cos- ja sin-osuudet voisivat vaikka hajaantua, vaika koko sarja suppenisi. Mutta tässähän lasketaan äärellisiä summia,..., kyllä, mutta myös äärellisellä tarkkuudella.

## Fourier-sarjat

Kts. yllä olevia referenssejä MAPLE- ja MATLAB-tekniikoihin.

$2L$-jaksoisen funktion $f$ Fourier-sarja:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}),$$

$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$

## Lämpöyhtälön Fourier-sarjaratkaisu MATLAB:lla

(Valtaosa seuraavan funktion riveistä on kommentteja.)

```
function [Z,x,T]=lamposin(L,c,b,T,M)
% HA 25.11.03
% Lasketaan lämpöyhtälön u_t = c^2 u_xx sinisarjaratkaisu korkeusmatriisina
%
% Input: L:   jakso/2
%        c:   c (Lämpöyhtälön c)
%        b:   sinisarjan kerroinvektori (nollat mukana)
%        T:   aikapisteet
%        M:   x-diskrertointi (oletus 50)
%
% Output: [Z,x,t] -  lämpötilamatriisi, x-vektori, t-vektori
%
% Esim:
% clear; close all
% L=10;c=sqrt(1.14);nb=10;
% b=1./(1:nb);b=rem((1:nb),2).*b;
% kerroin=400/pi; b=kerroin*b;
% T=linspace(0,10,10);
% [U,x,t]=lamposin(L,c,b,T);
% surfc(x,t,U);  % Pintapiirros
% figure
% plot(x,U)      % Lämpötilaprofiilit t-vektorin
%                %  ilmaisemilla ajanhetkillä.
%
N=length(T);
if nargin==4, M=50; end
nb=length(b);
x=linspace(0,L,M);
Z=zeros(M,N);
for n=1:nb;
   Z=Z+(b(n)*sin(n*pi*x./L))'*exp(-((n*pi*c/L)^2)*T);
   % Vanha tuttavamme ulkotulo on tässä korvaamaton.
end;
Z=Z';
```