

**Mat-1.192 Numeerinen ja symbolinen laskenta kevät 2005**

<http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/04/H/>

**Laskuharjoitus 2** (viikko 5 , 4.2.2004)

Pieni Matlab-opas: <http://www.math.hut.fi/~apiola/matlab/opus/lyhyt/>

Ehdotus 1): Tehdään kaikki torstaiksi 5.2. (Tehtäväpaperissa on ruhtinaallisesti ohjeita, neuvontaa ehdittäneen antaa jo to 27.1.)

Ehdotus 2): 3 ensimmäistä tehdään torstaiksi 4.2 ja katsotaan videotykin äärellä normaalisti silloin. Kahden viimeisen kanssa voidaan jatkaa neuvotusti to 4.2. ja ne palautetaan kirjallisesti (tarkempien ohjeiden mukaan) ti 11.2. mennessä.

(Päätetään to 27.1, kumpi)

- (a) Harj. 1 teht. 5:ssä määriteltiin reuna-arvot tehtävään  $-u'' = f$ ,  $u(0) = u(1) = 0$  liittyvä *Greenin funktio*. (Kts. myös alla)

Kirjoita tuo Greenin funktio oikeaksi MAPLE-funktioksi ja ratkaise yllä oleva RA-tehtävä (1-ulotteinen Poisson), kun  $f(x) = (3x + x^2)e^x$

(b) Kirjoita edellinen proseduuriksi. Vaikka Greenin funktioesitys on teoreettisesti elegantti ja hyödyllinen ominaisuuksia johdettaessa, on helpompaa ja tehokkaampaa käyttää laskemiseen sitä edeltävää kaavaa. Tällöin ei tarvita myöskään `assume`-komentoa.

```
Poisson1d:=proc(f,x)
# RA-tehtävän -u''=f, u(0)=u(1)=0 ratkaisu
# Syötteen f -- Yhtälön oikea puoli, funktio
#           x -- Tuloslausekkeen u muuttujasymboli.
# Tulos: ratkaisulauseke u (jonka muuttujana on symboli x).
# Esim: u:=Poisson1d(x^2,x);
#
local y;

..
end;
```

Proseduuri lienee luontevampaa kirjoittaa niin, että syöteparametri on

määritelty funktioksi eikä lausekkeeksi, muuten pitäisi päättää myös sen muuttujasymbolille nimi ja menisi hiukan hankalaksi. Tulos kannattaa palauttaa lausekkeena, sillä usein se kaipaa sieventelyä. Tällöin on annettava argumenttina myös muuttujan nimi, joka lausekkeessa esiintyy. (Kannattaa miettiä hetki, mitä tapahtuu, jos lausekkeen symbolina on  $y$ . Homma toimii oikein, lokaali  $y$  ja argumenttina annettu  $y$  eivät sotkeudu. Tällaiset asiat kannattaa yleensä ajatella/tarkistaa, muuten funktiokokoelma menee helposti aivan puuroksi, jonka toiminta riippuu siitä, millä nimillä muuttujia kutsutaan.)

Jos tarvitset tulosta funktiona, niin voit toimia tähän tyyliin:

```
> f:=x->...; u:=Poisson1d(f,x); u:=factor(u); # tms.
> uf:=unapply(u,x);
```

- Kirjoita MAPLE-proseduuri `Poisson1diff`, joka laskee differenssiapproksimaation 1-ulotteisen Poissonin yhtälön  $-u'' = f$ ,  $u(0) = u(1) = 0$  ratkaisulle. Ota pohjaksi harj1 teht 6 (c):n `Poisson1mat`-proseduurin koodi, tehokkuussyistä ei kannata pilkkoa näin pikkuisiin prosedureihin.

```
Poisson1diff:=proc(f,n)
# Syötteen f: yhtälön oikea puoli, funktio
#           n: sisäsolmujen lkm.
# Tulos: Kaksisarakeinen matriisi (n+2 x 2):
#       1. sarake: diskretoitu x-akseli, myös päätepisteet.
#       2. sarake: ratkaisuproksimaatiovektori v, myös nollat päissä.
local v,...;
h=1/(n+1);
...
v:=...;
X:=<0,Vector(X),1>; v:=<0,v,0>; # Liitetään reuna-arvot.
<X | v>; # Palautetaan 2- sarakeinen matriisi.
end;
```

(Tulos voitaisiin yhtä hyvin palauttaa esim. kahden listan listana, mahdollisuuksia on.)

Piirrä differenssiapproksimaatio sekä rinkuloina (tms. circle, cross,..) että murtoviivana samaan kuvaan muutamalla eri  $n$ :n arvolla. Alla ohjeessa on suora malli. Lopuksi voit piristää mieltäsi muutamalla animaatiolla (ohje).

3. Testaa vaikka tehtävän 1 funktio(i)lla. Lisää edellisen tehtävän differenssiapproksimaatiokuvaan analyttinen ratkaisu.

Rakenna taulukko, johon lasket maksimivirheen

$E_h = \max_{i=0..n+1} |u(x_i) - v_i|$  annetulla  $n$ :n arvolla ja josta voit katsoa, mitä virheelle tapahtuu, kun askel puolittuu. (Ohje)

4. Suorita sama MATLAB:lla. Tarkemmin sanottuna kirjoita MAPLE:lla tehty analyttinen ratkaisu MATLAB:iin ja tee numeerinen osuus MATLAB:lla täydentäen L/L2.html-tiedostossa olevaa hyvää alkua.

(Voit tyytyä MATLAB-skriptiin, eli ajotiedostoon, ei tarvitse välttämättä tehdä MATLAB-funktiota (vrt. MAPLE-proseduuri).)

Jos haluat, voit kokeilla ”numsym-henkistä”symbolilaskentaohjelmalla muodostetun kaavan tuomista MATLAB:iin (ohje).

Siis vastaavat graafiset esitykset ja taulukko. (ohje)

5. Olkoon nyt  $f = 100e^{-10x}$ . Tee vastaavat asiat kuin tehtävässä 3 tai 4, saat valita vapaasti, käytätkö MAPLE:a vai MATLAB:ia. Tutki tämän esimerkin valossa, lauseen **Theorem 2.2** s. 65 virhearvion terävyyttä. Tarkemmin sanottuna muodosta taulukko, jonka 1. sarake koostuu  $h$ :n arvoista  $1/10, 1/20, 1/40, 1/80, 1/160$ , 2. sarake todellisesta virheestä ja 3. sarake virhearviosta.

## Ohjeita

### Reuna-arvot tehtävä, Greenin funktio

**1-ulotteinen Poissonin probleema:**  $-u'' = f, u(0) = u(1) = 0$ .

**Analyttinen ratkaisu** voidaan esittää muodossa  $u(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y) dy$ , missä *Greenin funktio*  $G$  määritellään, kuten harj. 1 teht. 5:ssä. Laskettaessa kannattaa kuitenkin käyttää luentoprujussa olevaa, tätä kaavaa edeltävää muotoa.

**Numeerinen differenssiratkaistu**  $v = A \setminus b$  (MATLAB-notaatio), missä  $v_j = h^2 f(x_j)$

$$E_h = \max_{j=0..n+1} |u(x_j) - v_j|$$

## Ohjelmankehitys

1. **Kirjastofunktiot** kannattaa kirjoittaa pitkillä nimillään, kuten `LinearAlgebra[LinearSolve]`, tällöin ohjelman toiminta ei ole riippuvainen siitä, onko kirjasto ladattu vai ei. (Kirjastot ovat tyyppiä ”table”olevia tietorakenteita, joiden jäseniä voi indeksoida symbolisilla indekseillä.)

2. Kun kirjoitat proseduuria, kannattaa ensin suorittaa komennot tulkkiiympäristössä vuorovaikutteisesti tyyliin:

```
> n:=...: h:=...: f:=x->...
> ...
```

Sitten, kun istunto toimii, on vasta syytä kirjoittaa proseduuri Aivan sama pätee tietysti MATLAB-funktioihin nähden. (Toki näissä asioissa on yksilöllisiä tapoja ...)

3. **Ohjelmakoodit** kannattaa (ajan myötä) tallettaa tekstitiedostoon, vaikkapa `ohjelmat.mpl`. Se luetaan MAPLE-istuntoon komennolla `> read("polku/ohjelmat.mpl");` Kurssin aikana kehitetyt ja muutkin kurssille hyödylliset koodit talletetaan `..maple/ns05.mpl`-sivulle ja myös kurssihakemistoon: `/p/edu/mat-1.192/numsym05/ns05.mpl`, josta ne voi suoraan lukea MAPLE-istuntoon. Talletus käy joko edellä mainitulla tyyliillä:

```
> writeto("tilapainen.mpl"); # Varmuudeksi, ettei mene..
> print(minunuusihienoproseduurini); # ..vanhan päälle.
> writeto(terminal);
```

Toisaalta file-valikon export-valinnan ”save as Maple text”saadaan koko istunto tekstimuotoon, josta kaikki työarkilla olevat funktiot voidaan editoida talteen.

**Teht. 2** Tuloksen jälkikäsitteleyesimerkki:

```
> with(plots): # Ellei jo alussa
> Poisson1diff(f,5);
> xvpisteet:=convert(%,listlist);
> plot(%,style=point,symbol=circle,color=red);
> display(%,plot(xvpisteet,color=blue));
```

Tässä on käytetty %-merkkiä viittaamaan edelliseen tulokseen. Huomaa, että ”edellinen tulos” voi olla myös kuva. Muuten, ”prosenttia” on syytä käyttää aika säästeliäästi, mutta joskus se on kyllä kätevä.

Lisää grafiikkamahdollisuuksia (olkoon ”vapaaehtoista”). Usein on hyvin kätevää määritellä grafiikka-arvoinen funktio ja näyttää sitten koko jono kuvia. Siitä voi tehdä samantien animaation. Tässä esim.

```
Pdiffkuva:=n->plot(convert(Poisson1diff(f,n),listlist));
display(seq(Pdiffkuva(n),n=[5,10,15,20]),insequence=true);
```

Klikkaa hiirellä kuvaa, työkalunauhaan tulee animaation ajovalikko. (Ilman `insequence=true`-osaa (tai panemalla ”false”), saadaan käyräparvi.)

**Teht. 3** Tehtävän 2 `Poisson1diff` palauttaa tuloksen 2-sarakkeisena matriisina, sanokaamme `xv`. Matriisiin sarakkeen `j` poiminta: `X:=xv[1..-1,j]`; (Vrt. MATLAB:ssa: `xv(:,j)`, **huomaa myös erilaiset sulut.**)

Virhetaulukko voitaisiin rakentaa vaikka seuraaventyylisellä `for`-silmukalla:

```
> E:='E': X:='X':n:='n': xv:='xv': # Vapautetaan vanhoista arvoista.
> N:=8: # Ei kannata kovin paljon kasvattaa.
> for k from 0 to N do
>   n:=5*2^k: # n=5,10,20,40,...
>   xv:= ...
>   X:=.. 1. sarake
>   v:=.. 2. sarake
>   E[k]:=max(seq(abs(...))) # Huomaa, että max:n argumenttina on jono,
>                               # eikä esim. lista.
> end do;
> virheet:=seq(E[k],k=0..N);
```

Tässä perustettiin taulu ”table”, jota ei tarvitse millään lailla alustaa, ryhdytään vain indeksoimaan hakasuluilla. Taulua ei voi helposti käsitellä kokonaisuutena, kuten esim. listaa. Kannattaa siksi koota jonoksi `seq`:llä ja tarvittaessa listaksi ympäröimällä `[ ]`:lla. Huomaa, että listan indeksointi alkaa `1`:stä, sen sijaan taulun indeksinä voi olla mitä tahansa (vaikka ”kissa”). (Kokeile vaikka: `E[kissa]:=miau; print(E);`)

**Teht. 4** Eräs tapa symbolis-numeerisen rajapinnan hoitamiseen: Analyyttisen ratkaisukaavan tuominen MATLAB:iin

```
> writeto('polku/rojutiedosto.txt'):
> lprint(ulauseke);
> writeto('terminal):
```

Tässä pitää kirjoittaa `polku` kokonaisuudessaan tyylin `/home/apiola/opetus/numsym/05/H`.

Editoi sitten ”rojutiedostossa” oleva lauseke MATLAB-kuntoon esim. lisäämällä pisteitä sopivasti laskutoimitusmerkkien eteen.

Tätä voit testaila, toki näin yksinkertaisessa tapauksessa on helpompaa kirjoittaa lauseke suoraan. Myös `cut/paste` on helpompaa, ellei kaava ole kovin pitkä, mutta sen toiminta Unix-ympäristössä on sattumanvaraista. (WIN:ssä toimii kyllä.)

Kun saat homman toimimaan yhdellä `n`:llä, tee vastaavanlainen silmukka kuin MAPLE-työssä. Kirjoita vaikka samaan skriptitiedostoon `h2teht4.m` komennot jotenkin tähän tapaan:

```
clear; close all
f=inline('','x')
u=inline('','x');
N=5; E=[];
for n=5*2^(0:N) % Vertaa Maple-työhön
    h=1/(n+1);
    x=h:h:1-h; % Sisäsolmut (n kpl).
    % A=-diag(ones(n-1,1),-1)+2*diag(ones(n,1))-diag(ones(n-1,1),1);
    e = ones(n,1); A = spdiags([-e 2*e -e], -1:1, n, n);
    b=h^2*f(x); b=b'; % Oltava pystyvektori.
    v=A\b;
    x=[0,x,1]; v=[0;v;0];
    maxvirhe=max(abs(...));
    E=[E,maxvirhe];
    fplot(u,[0,1],'r'); hold on
plot(x,v,'b'); shg
'Jatka ENTER:llä'
pause
end;
```

Nyt voit nautiskella MATLAB:n mukavuuksista. Vektorissa  $E$  on virheet yllä olevilla  $n$  :n arvoilla. Peräkkäisten virheiden suhteet saat kätevästi jakamalla pisteittäin vektorit, joissa on alkiot  $2 \dots N$  ja  $1 \dots N - 1$ . Käytä varattua sanaa `end` hyväksesi.

Tee nyt taulukko, johon laitat 1. sarakkeeksi  $n$  :n, toiseksi  $h$  :n ja kolmanneksi  $E$ :n. Ei muuta kuin transponoit (tarvittaessa) ja rakennat tyyliin [eka toka kolmas]