

Mat-1.192 Numeerinen ja symbolinen laskenta kevät 2005

<http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/04/H/>

Laskuharjoitus 1 (viikko 4, 25 – 27.1.2004)

<http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/05/maple/perusteita.mws>

Yhdessä harjoittelua ohjatusti to 20.1.

Tiistainakin 25.1. voidaan jonkin verran aikaa varata kysymyksille.

Harjoitukset valmiiksi to 27.1.

Viitteitä, linkkejä, aputiedostoja

Aloita käynnistämällä Maple ja tekemällä työarkille otsikko ”title”, joksi vaikka Numsym, harjoitus 1, tms. sopivaa ja sen alle nimesi. Tee kutakin tehtävää kohti insert-valikon ”section”.

Muista: uusi kehote: CTR-J tai CTR-K, missä J, niinkuin ”jälkeen”.

1. Piirrä funktion $f(x) = 2x \cos 2x - (x - 2)^2$ kuvaaja välillä $[0, 5]$ (tms. sopivaa) ja määritä f :n nollakohdat (oletustarkkuudella) väleillä $[2, 3]$ ja $[3, 4]$

Päättele, onko funktiolla muita nollakohtia vai ei. Käytä mielellään päätelysi tueksi piirroksia sopivilla alueilla.

Avuksi: `?plot`, `?fsolve`. Tässä lienee hiukan yksinkertaisempaa käsitellä f :ää lausekkeena, siis tyyliin `> f:=2*x*cos(2*x) ...`

2. (Tehtävä työarkilta ”perusteita.mws”) Tarkastellaan polynomia $p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$.

(a) Muodosta derivaatta ja piirrä kuvaajat sopivilla väleillä. Käsittele polynomia ja sen derivaattaa lausekkeina. Kokeile kuvien yhdistämistä sekä tyyliin:

```
> p:=...;  
> dp:=...;  
> plot([p,dp],x=a..b,color=[red,blue]);
```

että myös:

```
with(plots):  
pkuva:=plot(p,...,color=red):  
dpkuva:=plot(dp,...,color=blue):  
display(pkuva,dpkuva);
```

Määritä nollakohdat ja paikalliset minimi- ja maksimit. Piirrä funktio ja sen derivaatta. Tarkista laskemalla funktion ja derivaatan arvot, että nollakohdat ovat nollakohtia/kriittisiä pisteitä (derivaatan nollakohtia).

(b) Tee sama tehtävä nyt käsittelemällä f :ää ja sen derivaattaa lausekkeen sijasta funktiona. Siis tyyliin

```
> f:=x->...; df:=D(f);
```

Mitkä ovat eri käsittelytapojen edut ja haitat?

Avuksi: `?plot`, `?solve`, `?fsolve`, `?diff`, `?D`, `?subs`

Derivaatta on 2. asteen polynomi, joten voit `fsolve`:n sijasta käyttää myös `solve`-komenttoa.¹

3. Muodosta välin $[0, 2\pi]$ tasavälinen jako n :ään osaväliin jakopisteillä x_0, x_1, \dots, x_n .

Muodosta jakopisteiden lista tyyliin:

```
> n:=10; # Tätä voit vaihdella.  
> h:=evalf(2*Pi/n); # Siirrytään liukulukulaskentaan.  
> X:=[seq(j*h,j=1..n)]; # Jono ympäröidään [ ]:lla -> lista  
> # vaihtoehtoisesti: X:=[j*h $ j=1..n]
```

Määrittele funktio $f(x) = \cos(x) - 1/2 \cos(3x) + 1/4 \sin(5x)$. Piirrä samaan kuvaan f ja pisteet $(x_j, f(x_j))$, $j = 0, \dots, n$.

4. Määrittele funktio $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ e^{1-x}, & x \geq 1. \end{cases}$

Määrittele f lausekkeeksi (tai funktioksi jos haluat), piirrä kuvaaja ja laske $\int_0^5 f(x) dx$. Tarkista integroimalla paloittain, että `int` osaa käsitellä `piecewise`-määrittelyä oikein.

Laske liukulukulikiarvo tulokselle (ja yritä sanoa tuo sana oikein nopeasti ! :-)).

Avustus: `?piecewise`

¹f-alkukirjain viittaa usein ”floating point”, eli liukulukulaskentaan.

5. Määritellään yksikköneliössä $[0, 1] \times [0, 1]$ funktio

$$G(x, y) = \begin{cases} x(1-y), & x \leq y \\ y(1-x), & y < x \end{cases}$$

Määrittele G Maple-funktioksi. Piirrä pintakuva `plot3d`:llä. Huvittele pyörittämällä kuvaa hiirellä. Piirrä myös käyräparvia, joissa toinen muuttuja saa eri vakioarvoja. Piirrä vaikka käyrät:

$G(x, 1/2)$, $G(x, 1/4)$, $G(x, 3/4)$. Piirrä myös parvi, jossa tällä kertaa y saa vakioarvot 0:sta 0.1:n välein 1:een.

Muodosta x :n funktio $x \rightarrow \int_0^1 G(x, y) dy$. (Ei ole pakko tehdä Maple-funktiota, kunhan saat lausekkeen.)

Huomaat, että Maple tarjoaa suht. mutkikkaan tuloksen Heavisiden funktioiden avulla lausuttuna. Tämä aiheutuu siitä, että Maplille ei ole kerrottu, että oletamme: $0 \leq x \leq 1$. Kts. alla (`assume`).

6. (a) Muodosta matriisi
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
 ensin kulmasulkutyyliin ja

sitten `BandMatrix`:n avulla

(b) Yleistä $n \times n$ -tapaukseen. Kirjoita ensin työarkille ”skripti”tyyliin:

```
n:=5: paalavistaja:=[..]; sivulavistaja:=[..]; A:=BandMatrix([..]);
```

Vaihtele n :ää. Huomaa, että voit kirjoittaa samaan soluun paljon kommentoja lopettamalla rivin SHIFT-ENTER:llä (tai jatkamalla ilman ENTER:iä).

Kun skripti toimii, kirjoita se funktioksi, eli `proc`:ksi, kts. alla olevaa ohjetta ja tarkemmin: [HAM] Luku 5 s. 113 \rightarrow

(c) Laske em. matriisin ominaisarvoja eri $n : n$ arvoilla. Totea kokeellisesti eri $n : n$ arvoilla, että matriisi on positiivisesti definiitti ja sen spektraalisyde (suurin ominaisarvo) on korkeintaan 4.

Avuksi: Siirry numeeriseen laskentaan komennolla `evalf(A)` tai `convert(A,float)`. (Huomaa, että nimestään huolimatta `convert` ei muuta A :ta, se palauttaa muunnetun muodon, on siis tehtävä tyyliin `A:=convert(A,float)`; jos halutaan muuttaa A :ta.)

Maple-ohjeita

Datapisteiden piirto:

```
plot([[x1,y1],...,[xn,yn]],style=point,symbol=circle,symbolsize=20);
```

Yllä olevan piirtodatan muodostaminen: `[seq([x[j],y[j]],j=1..n)]`; missä x ja y ovat listoja, jonoja, vektoreita, yms; mitä tahansa, jota indeksoidaan hakasuluilla.

Kuvien yhdistäminen:

```
> with(plots):
> kuva1:=plot(...): kuva2:=plot(...): # Huomaa loppumerkki:
> display(kuva1,kuva2);
```

`assume`. Tällä voidaan antaa tiettyjä tyyppioletuksia: Esim:

```
> interface(showassumed=2) # Miellyttävämpi ulkoasu
> assume(x >=0); additionally(x<=1) # 0 <= x <= 1
```

Huom! Joskus `assume`-komento voi aiheuttaa outoja sivuvaikutuksia, mutta versio versiolta tilanne on kehittynyt.

LinearAlgebra ja linalg

`LinearAlgebra` on uudempi ja syntaksiltaan mukavampi. Käytämme yksinomaan sitä, paitsi kun tarvitsemme jotain `linalg`-funktiota, jota ei uudessa ole. Useissa MAPLE-kirjoissa (myös [HAM]:ssa) esiintyy (sattuneesta syystä) vanhantyylistä matriisien käsittelyä. Uusi:

www.math.hut.fi/~apiola/maple/opas/LA.pdf

Vakiolatauskomennot: `with(LinearAlgebra): with(plots):`

Ohjelmointi ([HAM] Luku 5)

Tehtävän 6 ohjelma voisi olla asultaan tällainen:

```
Poisson1matr:=proc(n)
local paalavistaja,sivulavistaja,...;
...
end;
```

Muista tässä SHIFT-ENTER rivien vaihdoissa.