Teknillinen korkeakoulu
Mat-5.187 Epälineaarisen elementtimenetelmän perusteet (Mikkola/Ärölä)
6. harjoituksen ratkaisut

Teht. 1
Piolan Kirchhoffin toinen jännitys saadaan venymäenergiaa derivoimalla (5.4.35)

$$\mathbf{S} = 2\frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}. \tag{1}$$

Isotroppisen materiaalin venymäenergia voidaan lausua Cauchyn-Greenin muodonmuutostensorin $\mathbf{C}$ pääinvarianttien avulla. Soveltamalla tämän jälkeen derivoinnin ketjusääntöä saadaan

$$\mathbf{S} = 2\Big(\frac{\partial \psi}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}}\Big). \tag{2}$$

Invarianttien derivaattojen laskemiseksi tarkastellaan yleisen kääntyvän ja derivoituvan toisen kertaluvun tensorin $\mathbf{A}$ invarianttien derivaattoja. Ensimmäisen invariantin $I_1 = \mathrm{tr}\mathbf{A}$ suunnatuksi derivaataksi saadaan

$$\mathrm{D}I_1(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}+\epsilon\mathbf{U})\Big|_{\epsilon=0} = \mathrm{tr}\mathbf{U} = \mathbf{I} : \mathbf{U}, \tag{3}$$

joten ensimmäisen invariantin osittaisderivaataksi saadaan

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{I}. \tag{4}$$

Toisen invariantin $I_2 = \frac{1}{2}((\mathrm{tr}\mathbf{A})^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A}^2))$ suunnatuksi derivaataksi saadaan

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}I_1(\mathbf{A})[\mathbf{U}] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\,\frac{1}{2}\Big(\big(\mathrm{tr}(\mathbf{A}+\epsilon\mathbf{U})\big)^2 - \mathrm{tr}\big((\mathbf{A}+\epsilon\mathbf{U})^2\big)\Big)\Big|_{\epsilon=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\,\frac{1}{2}\Big(\big(\mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \epsilon\,\mathrm{tr}(\mathbf{U})\big)^2 - \mathrm{tr}\big(\mathbf{A}\mathbf{A} + \epsilon(\mathbf{A}\mathbf{U}+\mathbf{U}\mathbf{A}) + \epsilon^2\mathbf{U}\mathbf{U}\big)\Big)\Big|_{\epsilon=0} \\
&= \frac{1}{2}\big(2\,\mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathrm{tr}(\mathbf{U}) + 2\,\epsilon\,\mathrm{tr}(\mathbf{U})^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{U}+\mathbf{U}\mathbf{A}) - 2\,\epsilon\,\mathrm{tr}(\mathbf{U}\mathbf{U})\big)\Big|_{\epsilon=0} \\
&= \frac{1}{2}\big(2\,\mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathrm{tr}(\mathbf{U}) - 2\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{U})\big) \\
&= \mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathbf{I} : \mathbf{U} - \mathbf{A}^T : \mathbf{U} = (\mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathbf{I} - \mathbf{A}^T) : \mathbf{U},
\end{aligned} \tag{5}$$

joten toisen invariantin osittaisderivaataksi saadaan

$$\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{A}} = \mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathbf{I} - \mathbf{A}^T = I_1\,\mathbf{I} - \mathbf{A}^T. \tag{6}$$

Kolmannen invariantin $I_3 = \det \mathbf{A}$ suunnatuksi derivaataksi saatiin harjoituksen 4 tehtävässä 1

$$\mathrm{D}I_3(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\,\det(\mathbf{A}+\epsilon\,\mathbf{U})\Big|_{\epsilon=0} = \det(\mathbf{A})\mathbf{A}^{-T} : \mathbf{U}, \tag{7}$$

joten kolmannen invariantin osittaisderivaataksi saadaan

$$\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{A}} = \det(\mathbf{A})\mathbf{A}^{-T} = I_3\mathbf{A}^{-T}. \tag{8}$$

Sijoittamalla invarianttien derivaatat PK2 jännityksen lausekkeeseen (2) saadaan

$$\mathbf{S} = 2\Big(\frac{\partial \psi}{\partial I_1}\mathbf{I} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2}(I_1\mathbf{I} - \mathbf{C}^T) + \frac{\partial \psi}{\partial I_3}I_3\mathbf{C}^{-T}\Big). \tag{9}$$

Ottamalla huomioon tensorin $\mathbf{C}$ symmetria ja ryhmittelemällä termejä päädytään pyydettyyn tulokseen

$$\mathbf{S} = 2\Big(\frac{\partial\psi}{\partial I_1} + \frac{\partial\psi}{\partial I_2} I_1\Big)\mathbf{I} - 2\frac{\partial\psi}{\partial I_2}\mathbf{C} + 2I_3\,\frac{\partial\psi}{\partial I_3}\mathbf{C}^{-1}. \tag{10}$$

Teht. 2
Osoitetaan ensin tensoreiden $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ ja $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ pääinvarianttien olevan samat. Tätä varten johdetaan seuraavat tulokset

$$\mathrm{tr}(\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T) = \mathrm{tr}(\mathbf{F}^T\mathbf{F}) = \mathrm{tr}(\mathbf{C}), \tag{11}$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{B}^2) = \mathrm{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{F}^T) = \mathrm{tr}(\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{F}^T\mathbf{F}) = \mathrm{tr}(\mathbf{C}^2), \tag{12}$$

$$\det\mathbf{B} = \det(\mathbf{F}\mathbf{F}^T) = J^2 = \det\mathbf{C}. \tag{13}$$

Edellä esitetyn perusteella saadaan

$$I_1(\mathbf{B}) = I_1(\mathbf{C}), \quad I_2(\mathbf{B}) = I_2(\mathbf{C}), \quad I_3(\mathbf{B}) = I_3(\mathbf{C}). \tag{14}$$

Ottamalla huomioon Cauchyn ja PK2 jännityksen välinen yhteys (Box 3.2) $\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T$ saadaan tehtävässä 1 johdetusta lausekkeesta

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= 2J^{-1}\mathbf{F}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial I_1} + \frac{\partial\psi}{\partial I_2} I_1\Big)\mathbf{I}\mathbf{F}^T - 2J^{-1}\mathbf{F}\frac{\partial\psi}{\partial I_2}\mathbf{C}\mathbf{F}^T + 2J^{-1}\mathbf{F}I_3\,\frac{\partial\psi}{\partial I_3}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{F}^T && (15)\\
&= 2J^{-1}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial I_1} + \frac{\partial\psi}{\partial I_2} I_1\Big)\mathbf{B} - 2J^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial I_2}\mathbf{F}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{F}^T + 2J^{-1}I_3\,\frac{\partial\psi}{\partial I_3}\mathbf{F}(\mathbf{F}^T\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^T && (16)\\
&= 2J^{-1}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial I_1} + \frac{\partial\psi}{\partial I_2} I_1\Big)\mathbf{B} - 2J^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial I_2}\mathbf{B}^2 + 2J^{-1}I_3\,\frac{\partial\psi}{\partial I_3}\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^T && (17)\\
&= 2J^{-1}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial I_1} + \frac{\partial\psi}{\partial I_2} I_1\Big)\mathbf{B} - 2J^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial I_2}\mathbf{B}^2 + 2J^{-1}I_3\,\frac{\partial\psi}{\partial I_3}\mathbf{I}. && (18)
\end{aligned}$$

Päädyttiin siis pyydettyyn tulokseen

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial I_1} + \frac{\partial\psi}{\partial I_2} I_1\Big)\mathbf{B} - 2J^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial I_2}\mathbf{B}^2 + 2J^{-1}I_3\,\frac{\partial\psi}{\partial I_3}\mathbf{I}. \tag{19}$$

Teht. 3
Neo-Hookelaisen aineen venymäenergia on (5.4.54)

$$\psi(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\lambda_0(\ln J)^2 - \mu_0\ln J + \frac{1}{2}\mu_0(\mathrm{tr}\mathbf{C} - 3). \tag{20}$$

Invarianttien avulla lausuttuna tämä saa muodon

$$\psi(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2}\lambda_0(\ln(\sqrt{I_3}))^2 - \mu_0\ln(\sqrt{I_3}) + \frac{1}{2}\mu_0(I_1 - 3). \tag{21}$$

Venymäenergian derivaatoiksi invarianttien suhteen saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial I_1} &= \frac{1}{2}\mu_0,\\
\frac{\partial\psi}{\partial I_2} &= 0,\\
\frac{\partial\psi}{\partial I_3} &= \frac{1}{2}\lambda_0\cdot 2\ln(\sqrt{I_3})\frac{1}{\sqrt{I_3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{I_3}} - \mu_0\frac{1}{\sqrt{I_3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{I_3}} = \frac{1}{2I_3}(\lambda_0\ln J - \mu_0). && (22)
\end{aligned}$$

Käyttämällä edellä laskettuja derivaattoja, tehtävässä 2 saatua tulosta $I_i(\mathbf{C}) = I_i(\mathbf{B}),\ (i = 1, 2, 3)$ ja tehtävässä 2 johdettua Cauchyn jännityksen lauseketta saadaan

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= 2J^{-1}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial I_1} + \frac{\partial\psi}{\partial I_2} I_1\Big)\mathbf{B} - 2J^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial I_2}\mathbf{B}^2 + 2J^{-1}I_3\,\frac{\partial\psi}{\partial I_3}\mathbf{I} \\
&= 2J^{-1}\cdot\frac{1}{2}\mu_0\mathbf{B} + 2J^{-1}I_3\cdot\frac{1}{2I_3}(\lambda_0\ln J - \mu_0)\mathbf{I} = \\
&= J^{-1}\mu_0\mathbf{B} + J^{-1}(\lambda_0\ln J - \mu_0)\mathbf{I}. \qquad (23)
\end{aligned}$$

Muodonmuutosgradientti on tarkasteltavassa tapauksessa muotoa $\mathbf{F} = \alpha\mathbf{I}$, jolloin saadaan tulokset

$$J = \det\mathbf{F} = \alpha^3, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \alpha^2\mathbf{I}. \qquad (24)$$

Sijoittamalla nämä Cauchyn jännityksen lausekkeeseen saadaan

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}(\mu_0\alpha^2 + \lambda_0\ln J - \mu_0)\mathbf{I} = \big(\frac{\mu_0}{J}(J^{2/3} - 1) + \frac{\lambda_0}{J}\ln J\big)\mathbf{I}. \qquad (25)$$

Tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\boldsymbol{\sigma} = p\,\mathbf{I}, \qquad \text{missä} \quad p = \frac{\mu_0}{J}(J^{2/3} - 1) + \frac{\lambda_0}{J}\ln J. \qquad (26)$$

Teht. 4

Cauchyn jännityksen Truesdellin aikaderivaatta on (B3.5.2)

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla T} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathrm{div}(\mathbf{v})\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T. \qquad (27)$$

Derivoimalla PK2 jännityksen ja Cauchyn jännityksen välinen yhteys (Box 3.2) ajan suhteen saadaan

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}) = \dot{J}\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} + J\dot{\mathbf{F}}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} + J\mathbf{F}^{-1}\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{F}^{-T} + J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\dot{\mathbf{F}}^{-T}. \qquad (28)$$

Derivoimalla lauseke $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{I}$ puolittain ajan suhteen saadaan

$$\dot{\mathbf{F}}^{-1}\mathbf{F} + \mathbf{F}^{-1}\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{\mathbf{F}}^{-1} = -\mathbf{F}^{-1}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \qquad (29)$$

Käyttämällä lisäksi yhteyksiä

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}, \qquad \dot{J} = J\,\mathrm{div}\mathbf{v}. \qquad (30)$$

saadaan 2. Piolan-Kirchhoffin jännityksen materiaaliseksi aikaderivaataksi

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{S}} &= \dot{J}\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} + J\dot{\mathbf{F}}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} + J\mathbf{F}^{-1}\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{F}^{-T} + J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\dot{\mathbf{F}}^{-T} \\
&= J(\mathrm{div}(\mathbf{v})\,\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} - \mathbf{F}^{-1}\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} + \mathbf{F}^{-1}\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{F}^{-T} - \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T\mathbf{F}^{-T}) \\
&= J\,\mathbf{F}^{-1}(\mathrm{div}(\mathbf{v})\,\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} + \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T)\mathbf{F}^{-T} \\
&= J\,\mathbf{F}^{-1}(\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathrm{div}(\mathbf{v})\,\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T)\mathbf{F}^{-T}. \qquad (31)
\end{aligned}$$

Saadaan siis yhteys

$$\dot{\mathbf{S}} = J\,\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}^{\nabla T}\mathbf{F}^{-T}. \qquad (32)$$

Greenin-Lagrangen venymätensorin materiaalisen aikaderivaatan ja venymänopeustensorin välilllä on yhteys (3.3.21)

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T\mathbf{D}\mathbf{F} \qquad (33)$$

Tehtävässä annettu konstitutiivinen yhteys $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C}^{SE} : \dot{\mathbf{E}}$ voidaan näin ollen kirjoittaa

$$J\,\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}^{\nabla T}\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{C}^{SE} : (\mathbf{F}^T\mathbf{D}\mathbf{F}), \qquad (34)$$

josta edelleen

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla\mathcal{T}} = J^{-1}\mathbf{F}\big(\mathbf{C}^{SE} : (\mathbf{F}^T\mathbf{D}\mathbf{F})\big)\mathbf{F}^T. \tag{35}$$

Tämän jatkokehittely on helpointa tehdä komponenttimuodossa, jolloin saadaan

$$\sigma_{kl}^{\nabla\mathcal{T}} = J^{-1}F_{kP}F_{lQ}C_{PQRS}^{SE}F_{mR}F_{nS}D_{mn}. \tag{36}$$

Kimmoisuustensorin komponentille saadaan näin ollen lauseke

$$C_{klmn}^{\sigma\mathcal{T}} = J^{-1}F_{kP}F_{lQ}C_{PQRS}^{SE}F_{mR}F_{nS} \tag{37}$$

ja kimmoisuustensori on

$$\mathbf{C}^{\sigma\mathcal{T}} = J^{-1}F_{kP}F_{lQ}C_{PQRS}^{SE}F_{mR}F_{nS}\,\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l\otimes\mathbf{e}_m\otimes\mathbf{e}_n. \tag{38}$$