Teknillinen korkeakoulu
Mat-5.187 Epälineaarisen elementtimenetelmän perusteet (Mikkola/Ärölä)
5. harjoituksen ratkaisut

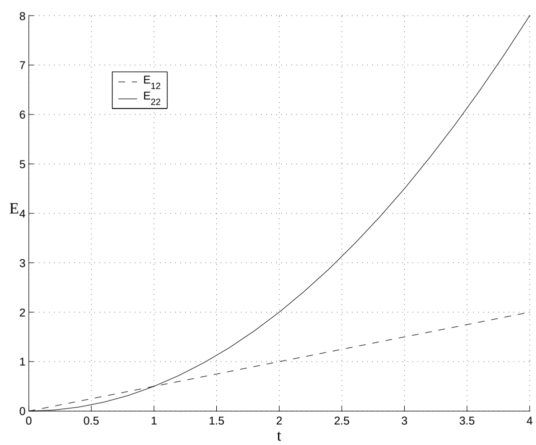
Teht. 1
Annettua liikettä $x = X + Yt,\ y = Y$ derivoimalla saadaan muodonmuutosgradientiksi

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Greenin-Lagrangen venymätensoriksi saadaan

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & t \\ t & t^2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Venymäkomponentit E_{12} ja E_{22} ajan funktiona on esitetty kuvassa 1. Venymäkomponentti E_{22} kasvaa voimakkaasti ajan kuluessa, koska kappaleen yläpinta pysyy vakio korkeudella ja näin ollen alunperin pystysuuntainen sivu joutuu kallistuessaan venymään.



Kuva 1: Venymäkomponentit E_{12} ja E_{22} ajan funktiona.

Kimmomatriisiksi tasovenymätilassa on kirjassa annettu

$$[C_{ab}^{\tau}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \tag{3}$$

jota käyttäen saadaan jännityksiksi

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{Bmatrix}. \tag{4}$$

Jännityskomponenteiksi saadaan siis

$$\begin{aligned} S_{11} &= (\lambda + 2\mu)E_{11} + \lambda E_{22} = \frac{1}{2}\lambda t^2, \\ S_{22} &= \lambda E_{11} + (\lambda + 2\mu)E_{22} = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\, t^2, \\ S_{12} &= \mu E_{12} = \frac{1}{2}\mu\, t. \end{aligned} \tag{5}$$

Teht. 2
Elementin solmupisteiden materiaalikoordinaatit ovat

$$\mathbf{X}_1 = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}, \quad \mathbf{X}_2 = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right\}, \quad \mathbf{X}_3 = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\}. \tag{6}$$

Elementin solmupisteiden spatiaalikoordinaateiksi $\mathbf{x}$ ajanhetkellä $t = 1$ saatiin harjoituksessa kolme

$$\mathbf{x}_1 = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}, \quad \mathbf{x}_2 = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right\}, \quad \mathbf{x}_3 = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\}. \tag{7}$$

Lineaarisen kolmioelementin muotofunktiot ovat alakoordinaatit, eli $\mathbf{N} = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3]$. Ala- ja materiaalikoordinaattien välinen yhteys on (E4.1.7)

$$\left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\} = \frac{1}{2A_0} \left[\begin{array}{ccc} Y_{23} & X_{32} & X_2Y_3 - X_3Y_2 \\ Y_{31} & X_{13} & X_3Y_1 - X_1Y_3 \\ Y_{12} & X_{21} & X_1Y_2 - X_2Y_1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} X \\ Y \\ 1 \end{array} \right\}, \tag{8}$$

missä on merkitty $X_{IJ} = X_I - X_J$ ja $Y_{IJ} = Y_I - Y_J$. Lisäksi $2A_0 = X_{32}Y_{12} - X_{12}Y_{32}$ on elementin alkuperäinen pinta-ala kaksinkertaisena. Yllä esitetystä saadaan muotofunktioiden derivaatoiksi materiaalikoordinaattien suhteen

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{1}{2A_0} \left[\begin{array}{ccc} Y_{23} & Y_{31} & Y_{12} \\ X_{32} & X_{13} & X_{21} \end{array} \right] = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{array} \right]. \tag{9}$$

Sijoittamalla muodonmuutosgradientin lausekkeseen muotofunktioiden avulla lausutut spatiaalikoordinaatit saadaan

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i^I N^I}{\partial X_j} = x_i^I \frac{\partial N^I}{\partial X_j}. \tag{10}$$

Käyttämällä nyt edellä laskettuja muotofunktioiden derivaattoja (9) sekä solmujen materiaalikoordinaatteja (7) saadaan muodonmuutosgradientin komponenteiksi

$$\begin{aligned} F_{11} &= x_1^I \frac{\partial N^I}{\partial X_1} = \frac{1}{2A_0}(x^1 Y_{23} + x^2 Y_{31} + x^3 Y_{12}) = \frac{1}{2}(0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = 1, \\ F_{12} &= x_1^I \frac{\partial N^I}{\partial X_2} = \frac{1}{2A_0}(x^1 X_{32} + x^2 X_{13} + x^3 X_{21}) = \frac{1}{2}(0 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2) = 1, \\ F_{21} &= x_2^I \frac{\partial N^I}{\partial X_1} = \frac{1}{2A_0}(y^1 Y_{23} + y^2 Y_{31} + y^3 Y_{12}) = \frac{1}{2}(0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = 1/2, \\ F_{22} &= x_2^I \frac{\partial N^I}{\partial X_2} = \frac{1}{2A_0}(y^1 X_{32} + y^2 X_{13} + y^3 X_{21}) = \frac{1}{2}(0 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2) = 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Muodonmuutosgradientiksi saadaan siis

$$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{array} \right]. \tag{12}$$

Todetaan, että on päädytty samaan tulokseen kuin annettua liikettä derivoimalla harjoituskierroksella kolme.

Tehtävän kohdassa (b) pyydettiin laskemaan elementin sisäiset voimat Piolan-Kirchoffin toisen jännitynsorin ollessa muotoa

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{cc} S_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]. \tag{13}$$

Lasketaan ensin muutamia aputuloksia. Muotofunktioiden derivaatoiksi nykytilan koordinaattien suhteen saadaan (E4.1.5)

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{2A}\left[\begin{array}{ccc} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{array}\right]. \tag{14}$$

Cauchyn jännityksen $\boldsymbol{\sigma}$ ja PK2 jännityksen $\mathbf{S}$ välinen yhteys on (Box 3.2)

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T. \tag{15}$$

Käyttämällä edellä laskettua muodonmuutosgradienttia ja lausekkeen (13) mukaista PK2 jännitystä saadaan Cauchyn jännitystensoriksi

$$\boldsymbol{\sigma} = S_{11}\left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{array}\right]. \tag{16}$$

Sisäiset voimat saadaan päivitettyä Lagrangen formulaatiota käytettäessä laskettua oppikirjan lausekkeesta (B4.3.2)

$$f_{iI}^{int} = \int_\Omega \frac{\partial N_I}{\partial x_j}\sigma_{ji}\,\mathrm{d}\Omega. \tag{17}$$

Sisäiset voimat saadaan nyt sijoittamalla lausekkeeseen (17) yhteydet (14) ja (16). Käydään laskenta yksityiskohtaisesti läpi solmun $I = 1$ osalta.

$$\text{suunta } x \ (i=1): \qquad f_1^{int} = \int_\Omega \frac{1}{2A}(y_{23}\sigma_{11} + x_{32}\sigma_{21})\,\mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega S_{11}\mathrm{d}\Omega, \tag{18}$$

$$\text{suunta } y \ (i=2): \qquad f_2^{int} = \int_\Omega \frac{1}{2A}(y_{23}\sigma_{12} + x_{32}\sigma_{22})\,\mathrm{d}\Omega = -\frac{1}{2}\int_\Omega S_{11}\mathrm{d}\Omega. \tag{19}$$

Samaan tapaan saadaan solmuja 2 ja 3 vastaaviksi sisäisten voimien vektoreiksi

$$\mathbf{f}_2^{int} = \frac{1}{2}\int_\Omega S_{11}\left\{\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right\}\mathrm{d}\Omega \qquad \text{ja} \qquad \mathbf{f}_3^{int} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right\}. \tag{20}$$

Jännityksen ja elementin paksuuden a olessa vakioita elementin alueella voidaan integrointi elementin yli suorittaa yksinkertaisesti kertomalla integrandi elementin nykytilan tilavuudella. Nyt on elementin nykytilan pinta-ala $A = 1/2$, jolloin sisäisiksi voimiksi saadaan

$$\mathbf{f}_1^{int} = -\frac{S_{11}a}{4}\left\{\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right\}, \qquad \mathbf{f}_2^{int} = \frac{S_{11}a}{4}\left\{\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right\}, \qquad \mathbf{f}_3^{int} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right\}. \tag{21}$$

Sisäiset voimat voidaan laskea myös pelkästään referenssitilan suureita käyttäen. Tämän kokonais Lagrangen formulaation mukainen lauseke sisäisille voimille on

$$f_{iI}^{int} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial N_I}{\partial X_j}P_{ji}\,\mathrm{d}\Omega_0. \tag{22}$$

Sijoittamalla tähän 1. ja 2. Piolan-Kirchoffin jännityksen välinen yhteys yhteys $\mathbf{P} = \mathbf{S}\mathbf{F}^T$ ja muotofunktioiden derivaatat referenssitilan koordinaattien suhteen (9) päädytään samaan tulokseen kuin päivitettyä Lagrangen formulaatiota käytettäessä.

Teht. 3

Liikemääräyhtälöstä (3.5.33) saadaan staattisen tilan tasapainoyhtälö kirjoittamalla aikaderivaattatermi nollaksi. Näin saadaan tasapainoyhtälöksi tilavuusvoimien $\mathbf{b}$ ollessa nollia

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}\mathbf{e}_i = \mathbf{0}. \tag{23}$$

Annetusta jännityksen $\mathbf{P}_\xi = J_\xi \mathbf{F}_\xi^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ lausekkeesta saadaan Cauchyn jännitykseksi

$$\boldsymbol{\sigma} = J_\xi^{-1} \mathbf{F}_\xi \cdot \mathbf{P}_\xi \qquad \Leftrightarrow \qquad \sigma_{ji} = J^{-1} F_{jk} P_{ki}\, \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i, \tag{24}$$

jossa on indeksinotaatiota käytettäessä jätetty kirjoitusasun selkiyttämiseksi indeksi ξ kirjoittamatta. Sijoittamalla tämä tasapainoyhtälöön saadaan

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}\, \mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_j}(J^{-1} F_{jk} P_{ki})\, \mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_j}(J^{-1} F_{jk}) P_{ki}\, \mathbf{e}_i + J^{-1} F_{jk} \frac{\partial P_{ki}}{\partial x_j}\, \mathbf{e}_i. \tag{25}$$

Käyttämällä tuloksia (3.6.11)

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(J^{-1} F_{jk}) = 0 \qquad \text{ja} \qquad F_{jk} = \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} \tag{26}$$

saadaan tasapainoyhtälöstä

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}\, \mathbf{e}_i = J^{-1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial P_{ki}}{\partial x_j}\, \mathbf{e}_i = J^{-1} \frac{\partial P_{ki}}{\partial \xi_k}\, \mathbf{e}_i = J_\xi^{-1} \nabla_\xi \cdot \mathbf{P}_\xi = \mathbf{0}. \tag{27}$$

Tästä saadaan tasapainoyhtälöksi kantaelementtialueessa

$$\nabla_\xi \cdot \mathbf{P}_\xi = \mathbf{0}. \tag{28}$$

Nykytilassa on alueen reunalla Γ_t annettu ehto

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t} \qquad \Leftrightarrow \qquad n_j \sigma_{ji} = t_i\ . \tag{29}$$

Kertomalla tämä nykytilan reuna-alkion pituudella $\mathrm{d}\Gamma$, sijoittamalla yhteys (24) ja käyttämällä tämän jälkeen Nansonin kaavaa ($\mathbf{n}\,\mathrm{d}\Gamma = J_\xi\, \mathbf{n}_{0\xi} \cdot \mathbf{F}_\xi^{-1} \mathrm{d}\Gamma_\xi$) saadaan

$$\begin{aligned} n_j \sigma_{ji}\, \mathrm{d}\Gamma &= J\, n_n^\xi F_{nj}^{-1} J^{-1} F_{jk} P_{ki}\, \mathrm{d}\Gamma_\xi & (30)\\ &= n_n^\xi F_{nj}^{-1} F_{jk} P_{ki}\, \mathrm{d}\Gamma_\xi & (31)\\ &= n_n^\xi \delta_{nk} P_{ki}\, \mathrm{d}\Gamma_\xi & (32)\\ &= n_k^\xi P_{ki}\, \mathrm{d}\Gamma_\xi. & (33) \end{aligned}$$

Koska $\mathbf{t}\,\mathrm{d}\Gamma = \mathbf{t}_\xi\,\mathrm{d}\Gamma_\xi$ saadaan reunaehdoksi

$$\mathbf{n}_{0\xi} \cdot \mathbf{P}_\xi = \mathbf{t}_{0\xi}\ . \tag{34}$$

Heikon muodon johtamiseksi edetään tavanomaiseen tapaan. Kerrotaan tasapainoyhtälö testifunktiolla, jolloin saadaan

$$\int_{\Omega_\xi} \delta\mathbf{u} \cdot (\nabla_\xi \cdot \mathbf{P}_\xi)\, \mathrm{d}\Omega_\xi = 0. \tag{35}$$

Indeksinotaatiota käyttäen tämä on

$$\int_{\Omega_\xi} \delta u_i \frac{\partial P_{ji}}{\partial \xi_j}\, \mathrm{d}\Omega_\xi = \int_{\Omega_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi_j}(\delta u_i P_{ji})\, \mathrm{d}\Omega_\xi - \int_{\Omega_\xi} \frac{\partial \delta u_i}{\partial \xi_j} P_{ji}\, \mathrm{d}\Omega_\xi. \tag{36}$$

Integroimalla yhtälön oikean puolen ensimmäinen termi saadaan

$$\int_{\Omega_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi_j}(\delta u_i P_{ji})\, \mathrm{d}\Omega_\xi = \int_{\Gamma_\xi} \delta u_i n_j P_{ji}\, \mathrm{d}\Gamma_\xi + \int_{\Gamma_{int}^\xi} \delta u_i [\![n_j P_{ji}]\!]\, \mathrm{d}\Gamma_\xi. \tag{37}$$

Tasapainotehtävän heikoksi muodoksi saadaan siis

$$\int_{\Omega_\xi} \frac{\partial \delta u_i}{\partial \xi_j} P_{ji}\, \mathrm{d}\Omega_\xi - \int_{\Gamma_\xi} \delta u_i n_j P_{ji}\, \mathrm{d}\Gamma_\xi - \int_{\Gamma_{int}^\xi} \delta u_i [\![n_j P_{ji}]\!]\, \mathrm{d}\Gamma_\xi = 0 \quad \forall\, \delta u_i \in \mathcal{U}. \tag{38}$$

Ensimmäinen termi edustaa sisäisiä voimia, toinen termi ulkoisia voimia ja kolmas on jatkuvuusvaatimus elementtien rajapinnoilla.

Elementin sisäisen virtuaalisen työn lauseke saadaan lausumalla testifunktio muotofunktioiden avulla muodossa

$$\delta u_i = \delta u_i^I N_I \tag{39}$$

ja sijoittamalla tämä lausekkeen (38) sisäisiä voimia vastaavaan termiin, missä integrointi suoritetaan nyt tarkasteltavan elementin yli. Sisäiseksi virtuaaliseksi työksi saadaan

$$\delta W^{int} = \delta u_i^I \int_{\Omega_\xi} \frac{\partial N_I}{\partial \xi_j} P_{ji} \, \mathrm{d}\Omega_\xi. \tag{40}$$

Sisäisten voimien ja sisäisen virtuaalisen työn välinen yhteys on $\delta W^{int} = \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}^{int}$, joten elementin solmuun I liittyviksi sisäisiksi voimiksi saadaan

$$f_{iI}^{int} = \int_{\Omega_\xi} \frac{\partial N_I}{\partial \xi_j} P_{ji} \, \mathrm{d}\Omega_\xi \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{f}_I^{int} = \int_{\Omega_\xi} \nabla_\xi N_I \cdot \mathbf{P}_\xi \, \mathrm{d}\Omega_\xi. \tag{41}$$

Teht. 4

Pintakuormien aiheuttamat ulkoiset voimat saadaan oppikirjan lausekkeesta (B4.3.3)

$$f_{Ii}^{ext} = \int_{\Gamma_{t_i}} N_I t_i \, \mathrm{d}\Gamma. \tag{42}$$

Sijoittamalla tähän paineen aiheuttama pintakuorma $t_i = -p\, n_i$, missä $n_i \mathbf{e}_i = \mathbf{n}$ on tarkasteltavan pinnan ulospäin suunnattu yksikkönormaali, saadaan solmuun I liittyväksi voimakomponentiksi i

$$f_{Ii}^{ext} = -\int_{\Gamma_{t_i}} p\, N_I n_i \, \mathrm{d}\Gamma. \tag{43}$$

Elementin nykytilan pintanormaalin ja kantaelementin pintanormaalin välillä pätee Nansonin kaava (3.4.5)

$$\mathbf{n}\, \mathrm{d}\Gamma = J_\xi \mathbf{n}_{0\xi} \cdot \mathbf{F}_\xi^{-1} \mathrm{d}\Gamma_{0\xi}. \tag{44}$$

Elementin pinnalla $\zeta = -1$ voidaan kaikki lausekkeet lausua koordinaattien ξ ja η avulla ja kyseisellä pinnalla pätee pinta-alkiolle $\mathrm{d}\Gamma_{0\xi} = \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta$. Käyttämällä Nansonin kaavaa ja edellä esitettyä pinta-alkion lauseketta saadaan

$$f_{Ii}^{ext} = -\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} p\, N_I J_\xi n_{j0\xi} F_{ji\xi}^{-1} \, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta, \tag{45}$$

joka tensorinotaatiota käyttäen kirjoitettuna on

$$\mathbf{f}_I^{ext} = -\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} pN_I J_\xi \mathbf{n}_{0\xi} \cdot \mathbf{F}_\xi^{-1} \, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta = -\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} pN_I J_\xi \mathbf{F}_\xi^{-T} \cdot \mathbf{n}_{0\xi} \, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta. \tag{46}$$

Päädyttiin siis pyydettyyn tulokseen.

Tarkastellaan seuraavaksi tehtävän kohtaa (b). Sijoittamalla saatuun ulkoisten voimien lausekkeeseen annettu käänteistensorin lauseke ja ottamalla huomioon yhteys $J_\xi = \det \mathbf{F}_\xi$ saadaan

$$\mathbf{f}_I^{ext} = -\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} pN_I J_\xi \frac{1}{\det(\mathbf{F}_\xi)} [\mathbf{F}_\xi^*]^T \cdot \mathbf{n}_{0\xi} \, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta = -\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} pN_I [\mathbf{F}_\xi^*]^T \cdot \mathbf{n}_{0\xi} \, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta. \tag{47}$$

Tässä tapauksessa on pintanormaali $\mathbf{n}_{0\xi} = \{0, 0, -1\}^T$. Ottamalla tämä huomioon ja kirjoittamalla auki edellisessä integraalissa esiintyvä pistetulo saadaan

$$\mathbf{f}_I^{ext} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} pN_I \left\{ \begin{array}{c} F_{31}^* \\ F_{32}^* \\ F_{33}^* \end{array} \right\} \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta. \tag{48}$$

Kokoa 3×3 olevan matriisin $\mathbf{A}$ *co-factor* on määritelty [1]

$$A_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}, \tag{49}$$

missä M_{jk} on jäljelle jäävän 2×2 matriisin determinantti, kun alkiota a_{jk} vastaavat vaaka ja pystyrivi poistetaan. Tarvittavat matriisin $[\mathbf{F}_\xi^*]$ alkioit co-factoreiden avulla lausuttuna ovat [2]

$$\begin{array}{rcl} F_{31}^* = A_{13} &=& (-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix} F_{21} & F_{22} \\ F_{31} & F_{32} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} F_{21} & F_{22} \\ F_{31} & F_{32} \end{bmatrix}, \\ F_{32}^* = A_{23} &=& (-1)^{3+2}\det\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{31} & F_{32} \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{31} & F_{32} \end{bmatrix}, \\ F_{33}^* = A_{33} &=& (-1)^{3+3}\det\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}. \end{array} \tag{50}$$

Sijoittamalla kantaelementin ja nykytilan välisen Jacobin matriisin lausekkeeseen muotofunktioita käyttäen kantaelementtikoordinaattien avulla lausutut spatiaalikoordinaatit saadaan

$$\mathbf{F}_\xi = \begin{bmatrix} x_I N_{I,\xi} & x_I N_{I,\eta} & x_I N_{I,\zeta} \\ y_I N_{I,\xi} & y_I N_{I,\eta} & y_I N_{I,\zeta} \\ z_I N_{I,\xi} & z_I N_{I,\eta} & z_I N_{I,\zeta} \end{bmatrix}. \tag{51}$$

Näin ollen voidaan lausekkeet (50) kirjoittaa

$$\begin{array}{rcl} F_{31}^* &=& (y_J N_{J,\xi})(z_K N_{K,\eta}) - (y_J N_{J,\eta})(z_K N_{K,\xi}), \\ F_{32}^* &=& -(x_J N_{J,\xi})(z_K N_{K,\eta}) + (x_J N_{J,\eta})(z_K N_{K,\xi}), \\ F_{33}^* &=& (x_J N_{J,\xi})(y_K N_{K,\eta}) - (x_J N_{J,\eta})(y_K N_{K,\xi}). \end{array} \tag{52}$$

Vertaamalla nyt lausekeita (48) ja (52) oppikirjan lausekkeeseen (E4.3.16)

$$\mathbf{f}_I^{ext} = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} pN_I \det\begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x_J N_{J,\xi} & y_J N_{J,\xi} & z_J N_{J,\xi} \\ x_K N_{K,\eta} & y_K N_{K,\eta} & z_K N_{K,\eta} \end{bmatrix} \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \tag{53}$$

todetaan näiden johtavan samoihin ulkoisten voimien komponentteihin.

[1] M. Greenberg, Adv. Eng. Math, s.84
[2] M. Greenberg, Adv. Eng. Math, s.107