

Teknillinen korkeakoulu

Mat-5.187 Epälineaarisen elementtimenetelmän perusteet (Mikkola/Ärölä)

12. harjoituksen ratkaisut

Teht. 1

Kirjan esimerkissä on kaikissa matriiseissa diagonaalien ulkopuolisilla termeillä virheelliset etumerkit. Tämä malliratkaisu on laskettu käyttäen oikeita etumerkkejä. Materiaalinopeus on (E7.1.8)

$$\mathbf{v} = \omega_1 \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \\ \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \end{bmatrix} \mathbf{X}. \quad (1)$$

Konvektionopeus on (E7.1.12)

$$\mathbf{c} = (\omega_1 - \omega_2) \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \\ \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \end{bmatrix} \mathbf{X}. \quad (2)$$

Yhteydestä (7.2.15) $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}$ saadaan verkkonopeudeksi

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathbf{c} = \omega_2 \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \\ \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \mathbf{v}. \quad (3)$$

Saatua verkkonopeuden ja materiaalinopeuden välistä yhteyttä käyttäen saadaan konvektionopeudeksi \mathbf{c} materiaalinopeuden avulla lausuttuna

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right). \quad (4)$$

Teht. 2

Käytetään hyväksi Nansonin kaavaa $\mathbf{nd}\Gamma = J\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 d\Gamma_0$. Lähdetään liikkelle kaavasta

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p\mathbf{I} \cdot \mathbf{n} = -p\mathbf{n}, \quad (5)$$

josta seuraa

$$\mathbf{f}_I^{ext} = \int_{\Gamma} N_I \mathbf{t} d\Gamma = - \int_{\Gamma} p N_I \mathbf{n} d\Gamma. \quad (6)$$

Solvettamalla Nansonin kaavaa kuvaukseen kantaelementistä nykytilaan saadaan

$$\mathbf{nd}\Gamma = J_{\xi} \mathbf{F}_{\xi}^{-T} \cdot \mathbf{n}_{0\xi} d\Gamma_0, \quad (7)$$

jossa $d\Gamma_0 = d\xi d\eta$ ja $\mathbf{n}_{0\xi} = \mathbf{e}_{\zeta}$ ($\mathbf{e}_{\zeta} = \mathbf{e}_{\xi} \times \mathbf{e}_{\eta}$). Tällöin yhdelle elementille

$$\mathbf{f}_I^{ext} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p N_I J_{\xi} \mathbf{F}_{\xi}^{-T} \cdot \mathbf{e}_{\zeta} d\xi d\eta. \quad (8)$$

Derivoimalla tämä ajan suhteen saadaan

$$\dot{\mathbf{f}}_I^{ext} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_I (\dot{p} J_{\xi} \mathbf{F}_{\xi}^{-T} \cdot \mathbf{e}_{\zeta} + p \dot{J}_{\xi} \mathbf{F}_{\xi}^{-T} \cdot \mathbf{e}_{\zeta} + p J_{\xi} (\dot{\mathbf{F}}_{\xi}^{-T}) \cdot \mathbf{e}_{\zeta}) d\xi d\eta. \quad (9)$$

Tarkastellaan kahden jälkimmäisen termin osuutta

$$\dot{\mathbf{f}}_I^{ext''} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_I (p \dot{J}_{\xi} \mathbf{F}_{\xi}^{-T} \cdot \mathbf{e}_{\zeta} + p J_{\xi} (\dot{\mathbf{F}}_{\xi}^{-T}) \cdot \mathbf{e}_{\zeta}) d\xi d\eta. \quad (10)$$

Muodonmuutosgradientti kantaelementistä nykytilaan on

$$[\mathbf{F}_{\xi}] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} & x_{,\zeta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} & y_{,\zeta} \\ z_{,\xi} & z_{,\eta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Tämän käänteismatriisi on

$$[\mathbf{F}_\xi]^{-1} = \frac{1}{J_\xi} \begin{bmatrix} \text{cof } x_{,\xi} & \text{cof } y_{,\xi} & \text{cof } z_{,\xi} \\ \text{cof } x_{,\eta} & \text{cof } y_{,\eta} & \text{cof } z_{,\eta} \\ \text{cof } x_{,\zeta} & \text{cof } y_{,\zeta} & \text{cof } z_{,\zeta} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\text{cof } x_{i,j} = \frac{1}{2} e_{ikl} e_{jmn} x_{k,m} x_{l,n}, \quad x_i = x, y, z; \quad j = \xi, \eta, \zeta. \quad (13)$$

Nähdään, että käänteismatriisin aikaderivaatta on

$$([\mathbf{F}_\xi]^{-1})' = -\frac{\dot{J}_\xi}{J_\xi} [\mathbf{F}_\xi]^{-1} + \frac{1}{J_\xi} \left[\frac{d}{dt} \text{cof } x_{j,i} \right] \quad (14)$$

Näin ollen

$$\dot{\mathbf{f}}_I^{ext'} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p N_I \left[\frac{d}{dt} \text{cof } x_{i,j} \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} d\xi d\eta. \quad (15)$$

Muokataan lauseketta

$$\left[\frac{d}{dt} \text{cof } x_{i,j} \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \left\{ \frac{d}{dt} \text{cof } x_{i,\zeta} \right\} \quad (16)$$

Komponenttien aikaderivaatat ovat

$$\frac{d}{dt} \text{cof } x_{i,3} = \frac{1}{2} e_{ikl} e_{3mn} (v_{k,m} x_{l,n} + x_{k,m} v_{l,n}). \quad (17)$$

Sijoitetaan approksimaatio $v_k = N_J v_{kJ}$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{cof } x_{i,3} &= \frac{1}{2} e_{ikl} e_{3mn} (N_{J,m} x_{l,n} v_{kJ} + N_{J,n} x_{k,m} v_{lJ}) \\ &= \frac{1}{2} e_{ikl} e_{3mn} (N_{J,m} x_{l,n} - N_{J,n} x_{l,m}) v_{kJ} \\ &= e_{ikl} (N_{J,\xi} x_{l,\eta} - N_{J,\eta} x_{l,\xi}) v_{kJ} \\ &= (N_{J,\xi} H_{ik}^\eta - N_{J,\eta} H_{ik}^\xi) v_{kJ}. \end{aligned} \quad (18)$$

Viimeisessä kohdassa on käytetty oppikirjan merkintöjä (6.4.31)

$$H_{ik}^\eta = e_{ikl} x_{l,\eta}, \quad H_{ik}^\xi = e_{ikl} x_{l,\xi}. \quad (19)$$

Näin on saatu tulos

$$\dot{\mathbf{f}}_{iI}^{ext''} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p N_I (N_{J,\xi} H_{ik}^\eta - N_{J,\eta} H_{ik}^\xi) d\xi d\eta v_{kJ}, \quad (20)$$

eli

$$\mathbf{K}_{iIkJ}^{ext} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p N_I (N_{J,\xi} H_{ik}^\eta - N_{J,\eta} H_{ik}^\xi) d\xi d\eta. \quad (21)$$

Kirjoitetaan vielä koko matriisi

$$\mathbf{K}_{IJ}^{ext} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p N_I \left(N_{J,\xi} \begin{bmatrix} 0 & z_{,\eta} & -y_{,\eta} \\ -z_{,\eta} & 0 & x_{,\eta} \\ y_{,\eta} & -x_{,\eta} & 0 \end{bmatrix} - N_{J,\eta} \begin{bmatrix} 0 & z_{,\xi} & -y_{,\xi} \\ -z_{,\xi} & 0 & x_{,\xi} \\ y_{,\xi} & -x_{,\xi} & 0 \end{bmatrix} \right) d\xi d\eta. \quad (22)$$

Teht. 3

Tasapainotehtävän implisiittinen ratkaisu voidaan kirjoittaa seuraavan kaavion mukaiseen muotoon.

Tasapainotilaratkaisun vuokaavio

1. Taulukoiden ja muuttujien alustus
2. Ulkoisen kuorman inkrementti $\mathbf{f}_{n+1}^{ext} = \mathbf{f}_n^{ext} + \Delta \mathbf{f}^{ext}$
3. Newtonin iteraatio kuormainkrementille $n + 1$
 - (a) lasketaan sisäiset voimat \mathbf{f}^{int} ja tangentialijäykkyys $\mathbf{K} = \mathbf{K}^{mat} + \mathbf{K}^{geo}$ aliohjelmassa *tangen*
 - (b) poistetaan kiinnitettyjä vapausasteita vastaavat termit tangentialijäykkyydestä \mathbf{K} ja residuaalista \mathbf{r}
 - (c) lasketaan residuaali $\mathbf{r} = \mathbf{f}^{int} - \mathbf{f}^{ext}$
 - (d) ratkaistaan linearisoitu yhtälöryhmä $\Delta \mathbf{d} = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{r}$
 - (e) päivitetään siirtymä $\mathbf{d} = \mathbf{d} + \Delta \mathbf{d}$
 - (f) tarkastetaan konvergenssikriteeri. Jos se ei täyty palataan kohtaan 3(a)
4. Päivitetään aika-askellaskuri ja aika: $n \leftarrow n + 1$, $t \leftarrow t + \Delta t$
5. Lopetus, jos $t < t_{max}$ palataan kohtaan 3.

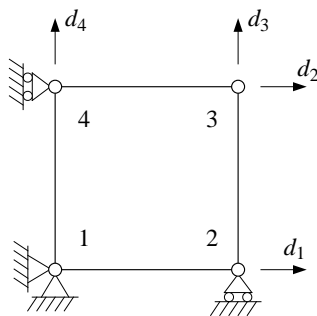
Tämän tehtävän ratkaisussa voidaan käyttää apuna kierroksen 11 tehtävässä 4 tehtyjä ohjelmanpätkiä. Tangentialijäykkyyksien laskennassa tarvittava funktio laadittiin jo viime harjoituksessa. Tähän lisätään vain sisäisten solmuvoimien \mathbf{f}^{int} laskenta. Elementin sisäiset voimat saadaan laskettua lausekkeesta (B4.3.2)

$$(\mathbf{f}_I^{int})^T = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f_{xI}^{int} & f_{yI}^{int} \end{bmatrix} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_{I,x} & N_{I,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} a J_{\xi} d\xi d\eta, \quad (23)$$

missä a on elementin paksuus. Suoritettasessa laskut yksikköpaksuutta kohti, asetetaan $a = 1$. Suorittamalla integrointi Gaussin kavalla saadaan

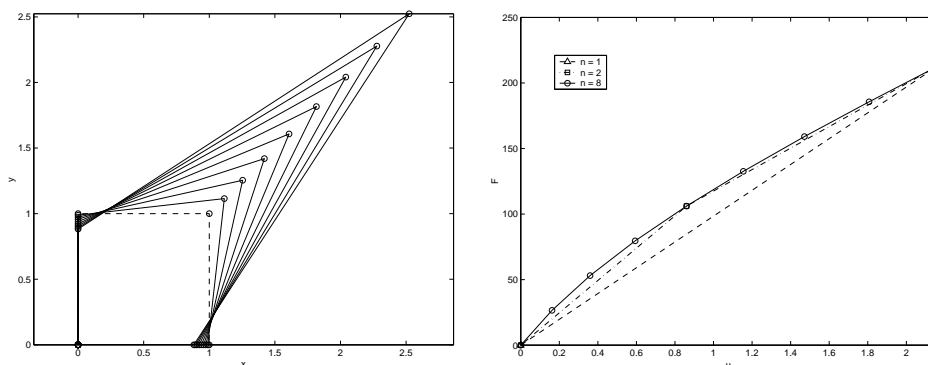
$$(\mathbf{f}_I^{int})^T = \sum_{Q_1=1}^{n_{Q_1}} \sum_{Q_2=1}^{n_{Q_2}} w_{Q_1} w_{Q_2} \mathbf{B}(\xi_{Q_1}, \eta_{Q_2})_I^T \boldsymbol{\sigma}(\xi_{Q_1}, \eta_{Q_2}) a J_{\xi}(\xi_{Q_1}, \eta_{Q_2}). \quad (24)$$

Lisäksi laaditaan pääohjelma, jossa hoidetaan voiman inkrementointi aika-askelleille ja Newton-Rhapon iterointi jokaisen aika-askelen sisällä. Tangentialijäykkyys ja sisäiset voimat lasketaan kaikille elementin vapausasteille ja näin saaduista matriiseista poistetaan kiinnitettyjä vapausasteita vastaavat rivit ja sarakkeet pääohjelmassa. Rakenteen aktiiviset vapausasteet ja niiden numerointi on esitetty kuvassa (1).



Kuva 1: Aktiivisten vapausasteiden numerointi.

Kuvassa (2a) on esitetty elementin muodon muuttuminen laskennan edetessä. Kuvan tapauksessa on laskenta suoritettu käyttäen kahdeksaa aika-askelta. Kuvassa (2b) on esitetty solmun 3 voima-siirtymä käyrä. Laskenta on suoritettu käyttäen yhtä, kahta ja kahdeksaa aika-askelta (kuorma inkrementtiä). Koska materiaali on elastista, on lopullinen tasapainotila polusta riippumaton ja kaikissa tapauksissa päädytään samaan siirtymän loppuarvoon. Kuten kuvasta (2b) voidaan havaita, edellyttää voima-siirtymäkäyrän tarkempi laskeminen kuitenkin useamman aika-askelen ottamista.



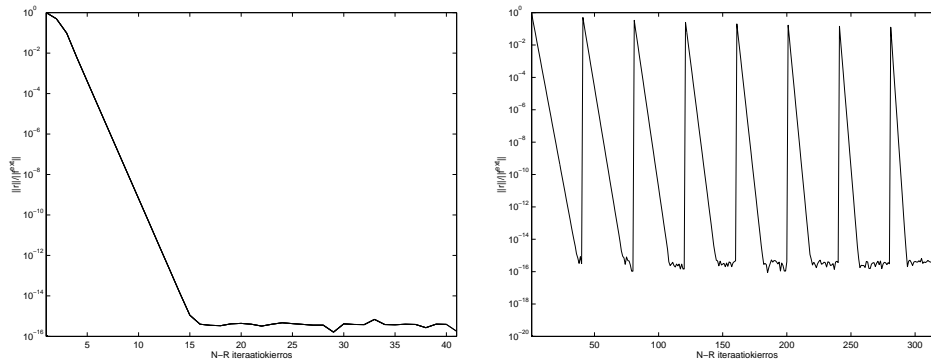
Kuva 2: (a) Elementin muodonmuutos kuorman kasvaessa. (b) Solmun 3 voima-siirtymäkäyrä laskettuna yhtä, kahta ja kahdeksaa aika-askelta käyttäen.

Newton-Rhapson iteraation konvergenssin mittarina käytettiin suuretta

$$e = \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{f}^{ext}\|} \quad (25)$$

Iteraation katsottiin supenneen, kun $e < tol$, missä tol on jokin ennalta määrätty toleranssi¹. Kuvassa (3) on esitetty ratkaisun konvergenssiä piirtämällä virhemitta e Newton-Rhapson iteraatio- n funktiona. Kuvassa (3a) on tilanne yhden kuormainkrementin tapauksessa ja kuvassa (3b) puolestaan kahdeksan inkrementin tapauksessa. Kummassakin tapauksessa asetettiin toleranssi niin tiukaksi, että se oli mahdotonta saavuttaa ja ratkaisut ajettiin tietokoneen lasketatarkkuuteen. Tämä näkyy virhemittan vakiintumisena tasolle $e \approx 10^{-15}$. Laskennassa käytettiin MATLAB ohjelmistoa ja tiedostoja *h12t1.m*, *tangen.m* ja *muoto4.m*. Näistä viimeinen on sama, jota käytettiin jo edellisellä harjoituskierroksella. Tiedosto *tangen.m* on miltei sama kuin harjoituksessa 11

¹ Esim: $tol = 10^{-5}$ 64-bittisellä aritmetiikalla ja $tol = 10^{-3}$ 32-bittisellä aritmetiikalla. R.Cook, D.Malkus, M.Plesha, Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 3rd edition, J.Wiley & Sons, 1989. s.509



Kuva 3: Virhemitan $e = \|\mathbf{r}\|/\|\mathbf{f}^{ext}\|$ kehittyminen Newtonin iteraation edetessä käytettäessä (a) yhtä ja (b) kahdeksaa aika-askelta.

käytetty. Siihen on lisätty ainoastaan sisäisten voimien laskenta. Käytetyt tiedostot on esitetty alla.

h12t1.m

```
nstep = 1; tmax = 4.0;
dt = tmax/nstep;
F = 150.0*[0; 1; 1; 0];
X = [0,1,1,0; 0,0,1,1];
```

```
%Askelten lukumäärä ja loppuaika
%Aika-askel
%Ulkoinen voima
%Alkutilan solmukoordinaatit
```

```
df = F/nstep;
```

```
%Voimainkrementti
```

```
%Taulukoiden alustus
```

```
D = [0;0;0;0];
fext = [0;0;0;0];
```

```
%Siirtymät
%Ulkoinen voima aika-askeleella
```

```
CN = zeros(1,100);
U1 = zeros(1,nstep);
F1 = zeros(1,nstep);
cn = 1;
```

```
%Konvergenssin tarkkailuun |r|/|fext|
%Solmun 3 kokonaissiirtymä
%Solmuun 3 vaikuttava voima
```

```
%Silmukka yli aika-askelten
```

```
t = 0; mstep = 1;
while(t < tmax)
fext = fext + df;
```

```
%N-R iteraatio
```

```
nmax = 39; tol = 1e-20;
jatka = 1; n = 0;
while(jatka)
n = n + 1;
```

```
U = [0,D(1),D(2),0; 0,0,D(3),D(4)];
x = X + U;
```

```
%Solmusiirtymät
%Nykytilan solmukoordinaatit
```

```
[K,fint] = tangen(X,x);
```

```
%Tangentiaalijäykkyys
```

```
ij = [3,5,6,8];
K = K(ij,ij);
fint = fint(ij);
```

```
%Reunaehtojen huomionti
```

```

    r = fint - fext; %Residuaali
    dD = -inv(K)*r; %Siirtymäinkrementti
    D = D + dD; %Siirtymän päivitys

    fnorm = norm(r)/norm(fext); %Voimien virhenormi
    CN(cn) = fnorm; cn = cn + 1;
    if(fnorm < tol | n > nmax) %Konvergenssikriteerin tarkastus
        n,fnorm
        jatka = 0;
    end
end

U1(mstep) = sqrt(D(2)^2 + D(3)^2); %Solmun 3 siirtymän tallennus
F1(mstep) = sqrt(fext(2)^2 + fext(3)^2); %Solmun 3 voiman tallennus

mstep = mstep + 1; %Aika-askel laskurin päivitys
t = t + dt; %Ajan päivitys
end

```

tangen.m

```

function[K,Fint] = tangstif(X,x)

lam = 100.0; mu = 100.0; %Materiaalivakiot

XI = 1.0/sqrt(3.0)*[-1.0, 1.0]; %Integrointipisteiden koordinaatit
W = [1.0 , 1.0]; %Painokertoimet
a = 1.0; %Elementin paksuus

Kmat = zeros(8,8); Kgeo = zeros(8,8); %Taulukoiden alustus
HH = zeros(4,4); Fint = zeros(8,1);
fint=zeros(8,1);

U = x - X; %Siirtymät

%Integrointi
for ipx = 1:2 %suunta xi
    for ipy = 1:2 %suunta eta
        eta = XI(ipx); xi = XI(ipy); %integrointipisteen koordinaatit
        w = W(ipx)*W(ipy); %painokerroin

        [N,J] = muotof4(X,xi,eta); %Muotofunktiot ja derivaatat X:n ja Y:n suhteen
        H = zeros(2); %Siirtymägradientti
        for I = 1:4
            H = H + [U(1,I)*N(2,I), U(1,I)*N(3,I); U(2,I)*N(2,I), U(2,I)*N(3,I)];
        end

        F = H + eye(2); %Muodonmuutosgradientti
        B = F*F'; %Vasenmanpuoleinen C-G def.tensori

        JF = det(F); %Muodonmuutosgradientin determinatti

        if(JF <= 0)
            'Virhe: Jacobin determinantti nolla tai negatiivinen'
            pause
        end

        [N,J] = muotof4(x,xi,eta); %Muotofunktiot ja derivaatat x:n ja y:n suhteen
    end
end

```

```

lam2 = lam/JF;    mu2 = (mu - lam*log(JF))/JF;
apu = lam2 + 2.0*mu2;
C = [apu, lam2 ,0; lam2, apu, 0; 0, 0, 2.0*mu2]; %Konstitutiivinen matriisi

Sig = mu/JF*(B-eye(2)) + lam/JF*log(JF)*eye(2); %Jännitystensori

B1 = [N(2,1), 0 ; 0, N(3,1); N(3,1), N(2,1)];
B2 = [N(2,2), 0 ; 0, N(3,2); N(3,2), N(2,2)];
B3 = [N(2,3), 0 ; 0, N(3,3); N(3,3), N(2,3)];
B4 = [N(2,4), 0 ; 0, N(3,4); N(3,4), N(2,4)];
B = [B1,B2,B3,B4];
BB = N((2:3),:);

for I = 1:4
    fint((2*I-1:2*I)) = BB(:,I)*Sig;           %Sisäiset voimat
end

Kmat = Kmat + B'*C*B*a*J*w;
HH = HH + BB'*Sig*BB*a*J*w;
Fint = Fint + fint*a*J*w;
end
end

for i = 1:4
    for j = 1:4
        Kgeo(2*i-1,2*j-1) = HH(i,j);
        Kgeo(2*i,2*j) = HH(i,j);
    end
end
end
K = Kmat + Kgeo;

```