Teknillinen korkeakoulu
Mat-5.187 Epälineaarisen elementtimenetelmän perusteet (Mikkola/Ärölä)
1. harjoituksen ratkaisut

Teht. 1
Käytettäessä Lagrangen formulaatiota voidaan virtuaalisen työn periaate kirjoittaa yksidimensioisessa tapauksessa muotoon (oppikirja 2.3.19)

$$\delta W(\delta u, u) \equiv \delta W^{int} - \delta W^{ext} + \delta W^{kin} = 0 \quad \forall \delta u \in \mathcal{U}_0, \tag{1}$$

missä

$$\delta W^{int} = \int_{X_a}^{X_b} \delta u_{,X}\, P A_0 \,\mathrm{d}X, \tag{2}$$

$$\delta W^{kin} = \int_{X_a}^{X_b} \delta u\, \rho_0 A_0 \ddot{u} \,\mathrm{d}X, \tag{3}$$

$$\delta W^{ext} = \int_{X_a}^{X_b} \delta u\, \rho_0 b A_0 \,\mathrm{d}X + (\delta u\, A_0 \bar{t}_x^{\,0})\big|_{\Gamma_t}. \tag{4}$$

Massan säilymisyhtälö ja jännitysten välinen muunnos ovat

$$\rho F A = \rho_0 A_0 \qquad \text{ja} \qquad P = \frac{A}{A_0}\sigma. \tag{5}$$

Virtuaalisen tehon lauseke saadaan nyt korvaamalla virtuaalinen siirtymä δu lausekkeissa (2), (3) ja (4) virtuaalisella nopeudella δv ja muuntamalla integraalit referenssitilasta (alkutilasta) nykytilaan. Derivoinnin ketjusääntöä käyttäen saadaan virtuaalisen siirtymän derivaatta lausuttua nykytilassa seuraavasti

$$\delta u_{,X} = \frac{\partial\, \delta u}{\partial X} = \frac{\partial\, \delta u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} = \delta u_{,x}\; F. \tag{6}$$

Viimeisessä kohdassa on käytetty hyväksi deformaatiogradientin määritelmää (2.2.4)

$$\frac{\partial x}{\partial X} = F. \tag{7}$$

Vaihdetaan nyt virtuaalinen siirtymä virtuaaliseksi nopeudeksi ja käytetään hyväksi yhteyksiä (5), (6) ja (7) virtuaalisen työn lausekkeen eri termeille.
Lausekkeesta (2) saadaan

$$\int_{x_a}^{x_b} \delta v_{,x} F \,\frac{A}{A_0}\sigma A_0 \,\frac{1}{F}\,\mathrm{d}x = \int_{x_a}^{x_b} \delta v_{,x}\, A\sigma \,\mathrm{d}x.$$

Lausekkeesta (3) saadaan

$$\int_{x_a}^{x_b} \delta v\, \rho\, F A\, \dot{v} \frac{1}{F}\,\mathrm{d}x = \int_{x_a}^{x_b} \delta v\, \rho\, A \dot{v} \,\mathrm{d}x.$$

Lausekkeesta (4) saadaan

$$\int_{x_a}^{x_b} \delta v\, \rho F b A \frac{1}{F}\,\mathrm{d}x + (\delta v\, A\bar{t}_x)\big|_{\Gamma_t} = \int_{x_a}^{x_b} \delta v\, \rho b A \,\mathrm{d}x + (\delta v\, A\bar{t}_x)\big|_{\Gamma_t}.$$

Keräämällä johdetut tulokset yhteen saadaan virtuaalisen tehon periaate kirjoitettua (2.7.9)

$$\delta P(\delta v, v) = \delta P^{int} - \delta P^{ext} + \delta P^{kin} = 0 \quad \forall \delta v \in \mathcal{U}_0, \tag{8}$$

missä

$$
\begin{aligned}
\delta P^{int} &= \int_{x_a}^{x_b} \delta v_{,x} \sigma A \,\mathrm{d}x, && (9)\\
\delta P^{kin} &= \int_{x_a}^{x_b} \delta v \,\rho\, A \dot{v} \,\mathrm{d}x, && (10)\\
\delta P^{ext} &= \int_{x_a}^{x_b} \delta v \,\rho b A \,\mathrm{d}x + (\delta v\, A \bar{t}_x)\Big|_{\Gamma_t}. && (11)
\end{aligned}
$$

Teht. 2

Käytetään laskuissa elementtikohtaista koordinaattia ξ, jonka yhteys koordinaattiin X on

$$
\xi = \frac{(X - X_1)}{l_0}, \qquad \xi \in [0, 1]. \tag{12}
$$

Kinemaattiseksi matriisiksi saadaan muotofunktiomatriisi $\mathbf{N} = \left[\begin{array}{cc} 1-\xi & \xi \end{array}\right]$ derivoimalla

$$
\mathbf{B}_0 = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial X} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial X} = \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \end{array}\right] \frac{1}{l_0}. \tag{13}
$$

Sisäiset voimat saadaan laskettua oppikirjan lauseketta (B2.2.3) käyttäen, jonka mukaan

$$
\mathbf{f}_e^{int} = \int_{\Omega_0^e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial X} P \,\mathrm{d}\Omega_0 = \int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}_0^T P \,\mathrm{d}\Omega_0. \tag{14}
$$

Differentiaalinen tilavuusalkio $\mathrm{d}\Omega_0$ on tässä tapauksessa

$$
\mathrm{d}\Omega_0 = A \,\mathrm{d}X = \big(A_{01}(1-\xi) + A_{02}\xi\big) l_0 \,\mathrm{d}\xi. \tag{15}
$$

Sijoittamalla sisäisten voimien lausekkeeseen kinemaattinen matriisi (13), tehtävässä annettu jännityksen lauseke $P = P_1(1-\xi) + P_2\xi$ ja ottamalla huomioon yhteys (15) saadaan

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_e^{int} &= \frac{1}{l_0}\int_0^1 \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array}\right] \big(P_1(1-\xi) + P_2\xi\big)\big(A_{01}(1-\xi) + A_{02}\xi\big) l_0 \,\mathrm{d}\xi = \\
&= \int_0^1 \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array}\right] \Big(P_1 A_{01}(1-\xi)^2 + (P_1 A_{02} + P_2 A_{01})\xi(1-\xi) + P_2 A_{02}\xi^2\Big) \,\mathrm{d}\xi = && (16)\\
&= \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array}\right] \big(\frac{1}{3}P_1 A_{01} + \frac{1}{6}(P_1 A_{02} + P_2 A_{01}) + \frac{1}{3}P_2 A_{02}\big).
\end{aligned}
$$

Elementin sisäisiksi solmuvoimiksi saadaan siis

$$
\mathbf{f}_e^{int} = \frac{1}{6}\big(2P_1 A_{01} + P_1 A_{02} + P_2 A_{01} + 2P_2 A_{02}\big) \left\{\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array}\right\}. \tag{17}
$$

Ulkoisten voimien aiheuttamat solmuvoimat saadaan laskettua oppikirjan lausekkeen (B.2.2.4) avulla, jonka mukaan

$$
\mathbf{f}_e^{ext} = \int_{\Omega_0^e} \rho_0 \mathbf{N}^T b \,\mathrm{d}\Omega_0 + (\mathbf{N}^T A_0 \bar{t}_x^{\,0})\Big|_{\Gamma_t^e}. \tag{18}
$$

Sijoittamalla yllä olevaan yhtälöön muotofunktiomatriisi $\mathbf{N}$ ja ottamalla huomioon yhteys (15) saadaan

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_e^{ext} &= \int_0^1 \rho_0 \left[\begin{array}{c} 1-\xi \\ \xi \end{array}\right] b \,\big(A_{01}(1-\xi) + A_{02}\xi\big) l_0 \,\mathrm{d}\xi = \\
&= \rho_0 b\, l_0 \int_0^1 \left\{\begin{array}{c} A_{01}(1-\xi)^2 + A_{02}\,\xi(1-\xi) \\ A_{01}\,\xi(1-\xi) + A_{02}\,\xi^2 \end{array}\right\} \mathrm{d}\xi. && (19)
\end{aligned}
$$

Integrointi suorittamalla saadaan vakiotilavuusvoiman b aiheuttamiksi ulkoisiksi solmuvoimiksi

$$\mathbf{f}_e^{ext} = \frac{\rho_0 b\, l_0}{6} \left\{ \begin{array}{c} 2A_{01} + A_{02} \\ A_{01} + 2A_{02} \end{array} \right\}. \tag{20}$$

Erikoistapauksessa $P_1 = P_2 = P$ ja $A_{01} = A_{02} = A_0$ saadaan lausekkeista (17) ja (20)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e^{int} &= PA_0 \left\{ \begin{array}{r} -1 \\ 1 \end{array} \right\}, & (21) \\ \mathbf{f}_e^{ext} &= \frac{\rho_0 b\, l_0 A_0}{2} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\}. & (22) \end{aligned}$$

Todetaan saatujen tulosten olevan yhteneväisiä oppikirjan esimerkissä esitettyjen lausekkeiden (E2.1.5 ja E2.1.8) kanssa.
Elementin massamatriisi saadaan oppikirjan lausekkeesta (B2.2.5), jonka mukaan

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_0^e} \rho_0 \mathbf{N}^T \mathbf{N}\, \mathrm{d}\Omega_0. \tag{23}$$

Sijoittamalla massamatriisin lausekkeeseen muotofunktiomatriisi ja yhteys (15) saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e &= \int_0^1 \rho_0 \begin{bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\xi & \xi \end{bmatrix} \big(A_{01}(1-\xi) + A_{02}\xi\big) l_0\, \mathrm{d}\xi = & (24) \\ &= \int_0^1 \rho_0 \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & \xi(1-\xi) \\ \xi(1-\xi) & \xi^2 \end{bmatrix} \big(A_{01}(1-\xi) + A_{02}\xi\big) l_0\, \mathrm{d}\xi = & (25) \\ &= \rho_0 l_0 \int_0^1 \begin{bmatrix} A_{01}(1-\xi)^3 + A_{02}\,\xi(1-\xi)^2 & A_{01}\,\xi(1-\xi)^2 + A_{02}\,\xi^2(1-\xi) \\ A_{01}\,\xi(1-\xi)^2 + A_{02}\,\xi^2(1-\xi) & A_{01}\,\xi^2(1-\xi) + A_{02}\,\xi^3 \end{bmatrix} \mathrm{d}\xi. & (26) \end{aligned}$$

Suorittamalla tarvittavat integroinnit saadaan konsistentiksi massamatriisiksi

$$\mathbf{M}_e = \frac{\rho_0 l_0}{12} \begin{bmatrix} 3A_{01} + A_{02} & A_{01} + A_{02} \\ A_{01} + A_{02} & A_{01} + 3A_{02} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Diagonalisoimalla massamatriisi *row-sum*-tekniikalla (laskemalla alkiot riveittäin yhteen ja sijoittamalla saadut arvot diagonaalille) saadaan

$$\mathbf{M}_e^{rs} = \frac{\rho_0 l_0}{6} \begin{bmatrix} 2A_{01} + A_{02} & 0 \\ 0 & A_{01} + 2A_{02} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Elementin ominaistaajuudet ω saadaan ominaisarvotehtävästä $\mathbf{Ky} = \omega^2 \mathbf{My}$. Ominaisarvot (=ominaistaajuuksien neliöt) ovat yhtälön

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \tag{29}$$

ratkaisut. Elementin jäykkyysmatriisiksi oli tehtävänannossa annettu

$$\mathbf{K} = \frac{E^{PF}(A_{01} + A_{02})}{2l_0} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Konsistenttia massamatriisia (27) käyttäen saadaan karakteristiseksi yhtälöksi

$$\frac{1}{72}\omega^2 \rho_0 \Big(E^{PF}(-18A_{01}^2 - 36A_{01}A_{02} - 18A_{02}^2) + \omega^2 \rho_0 l_0^2 (A_{01}^2 + 4A_{01}A_{02} + A_{02}^2) \Big) = 0. \tag{31}$$

Tästä saadaan ratkaisuksi

$$\omega^2 = 0 \qquad \text{tai} \qquad \omega^2 = \frac{E^{PF}}{\rho_0 l_0^2} \frac{(18A_{01}^2 + 36A_{01}A_{02} + 18A_{02}^2)}{(A_{01}^2 + 4A_{01}A_{02} + A_{02}^2)}. \tag{32}$$

Diagonalisoitua massamatriisia käyttäen saadaan karakteristiseksi yhtälöksi

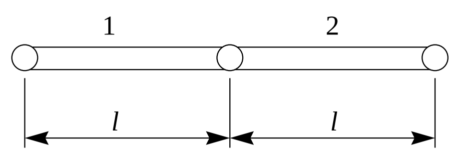
$$\frac{1}{36}\omega^2\rho\Big(E^{PF}(-9A_{01}^2 - 18A_{01}A_{02} - 9A_{02}^2) + \omega^2\rho_0 l_0^2(2A_{01}^2 + 5A_{01}A_{02} + 2A_{02}^2)\Big) = 0. \tag{33}$$

Tästä saadaan ratkaisuksi

$$\omega^2 = 0 \qquad \text{tai} \qquad \omega^2 = \frac{E^{PF}}{\rho_0 l_0^2}\frac{(9A_{01}^2 + 18A_{01}A_{02} + 9A_{02}^2)}{(2A_{01}^2 + 5A_{01}A_{02} + 2A_{02}^2)}. \tag{34}$$

Teht. 3

Tarkastellaan kuvan (1) mukaista kahdesta peräkkäin kytketystä elementistä muodostuvaa mallia. Elementtien jäykkyys- ja massamatriisit saadaan laskettua edellisen tehtävän tuloksia hyväksi käyt-



Kuva 1. Kahdesta elementistä koostuva malli.

täen. Sijoittamalla edellisessä tehtävässä esitettyihin lausekkeisiin elementin pituus l ja poikkileikkauksen ala A (vakio) saadaan yksittäisille elementeille

$$\mathbf{K}_e = \frac{E^{PF}A}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M}_e = \frac{\rho l A}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M}_e^{rs} = \frac{\rho l A}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Kytkemällä kaksi elementtiä peräkkäin saadaan koko rakenteelle vastaaviksi matriiseiksi

$$\mathbf{K} = \hat{E}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \frac{\hat{\rho}}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{rs} = \frac{\hat{\rho}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Edellä on kirjoitusasun selkeyttämiseksi otettu käyttöön lyhennysmerkinnät

$$\hat{E} = \frac{E^{PF}A}{l} \qquad \text{ja} \qquad \hat{\rho} = \rho l A$$

Karakteristiseksi yhtälöksi saadaan konsistenttia massamatriisia käyttäen

$$\det(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}) = \lambda\hat{\rho}(-2\hat{E}^2 + \frac{5}{6}\hat{E}\lambda\hat{\rho} - \frac{1}{18}\lambda^2\hat{\rho}^2) = 0. \tag{37}$$

Tästä saadaan

$$\lambda = 0 \qquad \text{tai} \qquad -2\hat{E}^2 + \frac{5}{6}\hat{E}\lambda\hat{\rho} - \frac{1}{18}\lambda^2\hat{\rho}^2 = 0. \tag{38}$$

Jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$\lambda^2 - 15\hat{c}^2\lambda + 36\hat{c}^4 = 0, \qquad \hat{c}^2 = \frac{\hat{E}}{\hat{\rho}}, \tag{39}$$

mistä saadaan ratkaistua

$$\lambda = \frac{15\hat{c}^2 \pm \sqrt{225\hat{c}^4 - 4\cdot 36\hat{c}^4}}{2} = \frac{15\hat{c}^2 \pm \sqrt{81\hat{c}^4}}{2} = \frac{(15\pm 9)\hat{c}^2}{2}. \tag{40}$$

Saadut ominaisarvot ovat ominaistaajuuksien neliöitä. Ominaistaajuuksiksi saadaan siis

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{3}\,\hat{c} \approx 1.7321\,\hat{c}, \quad \omega_3 = 2\sqrt{3}\,\hat{c} \approx 3.4641\,\hat{c}. \tag{41}$$

Diagonalisoitua massamatriisia käytettäessä saadaan karakteristiseksi yhtälöksi

$$\det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}^{rs}) = \lambda \hat{\rho}(-2\hat{E}^2 + \frac{3}{2}\hat{E}\lambda\hat{\rho} - \frac{1}{4}\lambda^2\hat{\rho}^2) = 0. \tag{42}$$

Tästä saadaan

$$\lambda = 0 \qquad \text{tai} \qquad -2\hat{E}^2 + \frac{3}{2}\hat{E}\lambda\hat{\rho} - \frac{1}{4}\lambda^2\hat{\rho}^2 = 0. \tag{43}$$

Jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$\lambda^2 - 6\hat{c}^2\lambda + 8\hat{c}^4 = 0, \tag{44}$$

mistä saadaan ratkaistua

$$\lambda = \frac{6\hat{c}^2 \pm \sqrt{36\hat{c}^4 - 4\cdot 8\hat{c}^4}}{2} = \frac{6\hat{c}^2 \pm \sqrt{4\hat{c}^4}}{2} = \frac{(6\pm 2)\hat{c}^2}{2}. \tag{45}$$

Ominaistaajuuksiksi saadaan siis

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{2}\,\hat{c} \approx 1.4142\,\hat{c}, \quad \omega_3 = 2\hat{c}. \tag{46}$$

Vapaan sauvan tarkka ratkaisu antaa ominaistaajuuksiksi $\omega_n = n\pi c/L$, $n = 0, 1, \ldots$. Tämän tehtävän tapauksessa $L = 2\,l$, jolloin saadaan

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 1.5708\,\hat{c}, \quad \omega_3 = 3.1416\,\hat{c}. \tag{47}$$

Tarkastelemalla saatuja tuloksia todetaan konsistenttia massamatriisia käyttäen laskettujen ominaistaajuuksien olevan tarkkan ratkaisun yläpuolella ja diagonalisoitua massamatriisia käyttäen tarkan ratkaisun alapuolella.

	tarkka	diagonalisoitu	konsistentti
ω_2	1.5708 $\hat{c}$	1.4142 $\hat{c}$	1.7321 $\hat{c}$
ω_3	3.1416 $\hat{c}$	2.0000 $\hat{c}$	3.4641 $\hat{c}$

Teht. 4

Pallokoordinaatistossa differentiaalinen tilavuusalkio on

$$\mathrm{d}\Omega = r^2 \sin\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta. \tag{48}$$

Tarkastellaan nyt vain säteestä riippuvan funktion $f = f(r)$ integraalia onton pallon (sisäsäde r_1, ulkosäde r_2) tilavuuden yli. Saadaan

$$\int_\Omega f(r)\mathrm{d}\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{r_1}^{r_2} f(r)r^2\sin\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = 4\pi\int_{r_1}^{r_2} f(r)r^2\,\mathrm{d}r. \tag{49}$$

Pallosymmetrisessä tapauksessa saadaan sisäiseksi virtuaaliseksi tehoksi

$$\delta P^{int} = 4\pi\int_{r_1}^{r_2}(\delta D_{rr}\sigma_{rr} + \delta D_{\theta\theta}\sigma_{\theta\theta} + \delta D_{\phi\phi}\sigma_{\phi\phi})r^2\,\mathrm{d}r. \tag{50}$$

Sijoittamalla tähän annetut muodonmuutosnopeuskomponentit

$$D_{rr} = v_{r,r}, \quad D_{\theta\theta} = D_{\phi\phi} = \frac{1}{r}\,v_r \tag{51}$$

saadaan

$$\delta P^{int} = 4\pi\int_{r_1}^{r_2}\big(\delta v_{r,r}\sigma_{rr} + \delta v_r\frac{(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\phi\phi})}{r}\big)r^2\,\mathrm{d}r. \tag{52}$$

Muokataan hieman yllä olevan integraalin ensimmäistä termiä, jolloin saadaan

$$\int_{r_1}^{r_2} \delta v_{r,r}\sigma_{rr}r^2\,\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} (\delta v_r\sigma_{rr}r^2)_{,r}\,\mathrm{d}r - \int_{r_1}^{r_2} \delta v_r(\sigma_{rr,r} + \frac{2\sigma_{rr}}{r})r^2\,\mathrm{d}r. \tag{53}$$

Sisäiseksi virtuaaliseksi tehoksi saadaan näin ollen

$$\delta P^{int} = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \delta v_r\big(- \sigma_{rr,r} - \frac{2\sigma_{rr}}{r} + \frac{(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\phi\phi})}{r}\big)r^2\mathrm{d}r + 4\pi(\delta v_r\bar{t}_r r^2)\Big|_{\Gamma_t} - \sum_i \delta v[\![\sigma_{rr}r^2]\!]. \tag{54}$$

Ulkoinen virtuaalinen teho on

$$\delta P^{ext} = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \delta v_r\rho\, b_r r^2\mathrm{d}r + (4\pi\delta v_r\bar{t}_r r^2)\Big|_{\Gamma_t}. \tag{55}$$

Kineettinen virtuaalinen teho on

$$\delta P^{kin} = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \delta v_r\rho\,\dot{v}_r r^2\mathrm{d}r. \tag{56}$$

Virtuaalisen tehon periaatteen mukaan

$$\delta P = \delta P^{int} - \delta P^{ext} + \delta P^{kin} = 0 \quad \forall\delta v \in \mathcal{U}_0. \tag{57}$$

Sijoittamalla edellä lasketut tehojen lausekeet saadaan virtuaaliseksi tehoksi

$$\delta P = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \delta v_r\big(- \sigma_{rr,r} - \frac{2\sigma_{rr}}{r} + \frac{(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\phi\phi})}{r} - \rho\, b_r + \rho\,\dot{v}_r\big)r^2\mathrm{d}r - \sum_i \delta v[\![\sigma_{rr}r^2]\!] \tag{58}$$

Jotta lauseke (58) olisi nolla kaikilla $\delta v \in \mathcal{U}_0$, on oltava

$$-\sigma_{rr,r} - \frac{2\sigma_{rr}}{r} + \frac{(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\phi\phi})}{r} - \rho\, b_r + \rho\,\dot{v}_r = 0 \qquad \text{ja} \qquad [\![\sigma_{rr}r^2]\!] = 0. \tag{59}$$

Pienen termien uudelleenjärjestelyn jälkeen saadaan liikemääräyhtälöksi

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi})}{r} + \rho\, b_r = \rho\,\dot{v}_r. \tag{60}$$

Tehtävän vahva muoto voidaan näin ollen kirjoittaa seuraavasti:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi})}{r} + \rho\, b_r = \rho\,\dot{v}_r, \tag{61}$$

$$\vec{n}\,\sigma_{rr} = \bar{t}_r, \quad r \in \Gamma_t, \tag{62}$$

$$[\![\sigma_{rr}r^2]\!] = 0. \tag{63}$$

Lisäksi tarvitaan konstitutiivinen yhteys jännityskomponenttien ja nopeuden välille.

Muodostetaan seuraavaksi pallosymmetrisen lineaarisen elementin $\mathbf{B}$, $\mathbf{f}_e^{int}$ ja $\mathbf{f}_e^{ext}$. Otetaan käyttöön elementtikoordinaatti ξ

$$\xi = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} = \frac{r - r_1}{r_{21}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r_{21}}. \tag{64}$$

Elementin nopeuskenttä lausuttuna solmunopeuksien avulla on

$$v(\xi, t) = \begin{bmatrix} 1 - \xi & \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{Bmatrix}. \tag{65}$$

Käyttämällä muodonmuutosnopeuskomponentteja (51) ja nopeuskenttää (65) saadaan matriisimuodossa (vrt. E2.6.7)

$$\mathbf{D} = \left\{ \begin{array}{c} D_r \\ D_\theta \\ D_\phi \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} -1/r_{21} & 1/r_{21} \\ (1-\xi)/r & \xi/r \\ (1-\xi)/r & \xi/r \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} v_1(t) \\ v_2(t) \end{array} \right\} = \mathbf{B}\mathbf{v}_e. \tag{66}$$

Sisäiset solmuvoimat saadaan lausekkeesta (vrt. E2.6.8)

$$\mathbf{f}_e^{int} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}\Omega = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \left[\begin{array}{ccc} -1/r_{21} & (1-\xi)/r & (1-\xi)/r \\ 1/r_{21} & \xi/r & \xi/r \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_\phi \end{array} \right\} r^2\, \mathrm{d}r. \tag{67}$$

Yllä oleva integrointi voidaan suorittaa joko koordinaattia r käyttäen, jolloin lausekkeeseen tulee sijoittaa ξ lausuttuna koordinaatin r avulla (64) tai koordinaattia ξ käyttäen, jolloin lausekkeeseen tulee sijoittaa r ja $\mathrm{d}r$ lausuttuna koordinaatin ξ avulla. Elementin massamatriisi saadaan laskettua lausekkeesta (vrt. E2.6.9)

$$\mathbf{M}_e = \int_{r_1}^{r_2} \rho_0 \left[\begin{array}{c} 1-\xi \\ \xi \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1-\xi & \xi \end{array} \right] 4\pi r^2\, \mathrm{d}r. \tag{68}$$

Käytetään integrointimuuttujana elementtikoordinaattia ξ, jolloin saadaan

$$\mathbf{M}_e = 4\pi \int_0^1 \rho_0 \left[\begin{array}{c} 1-\xi \\ \xi \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1-\xi & \xi \end{array} \right] (r_{21}\xi + r_1)^2\, r_{21} \mathrm{d}\xi. \tag{69}$$

Suorittamalla edellä esitetty integorinti saadaan konsistentiksi massamatriisiksi

$$\mathbf{M}_e = \frac{\pi \rho_0 r_{21}}{15} \left[\begin{array}{cc} 2r_{21}^2 + 10r_1 r_{21} + 20r_1^2 & 3r_{21}^2 + 10r_1 r_{21} + 10r_1^2 \\ 3r_{21}^2 + 10r_1 r_{21} + 10r_1^2 & 12r_{21}^2 + 30r_1 r_{21} + 20r_1^2 \end{array} \right]. \tag{70}$$

Vakiotilavuusvoiman aiheuttamat ulkoiset solmuvoimat ovat

$$\mathbf{f}_e^{ext} = \int_{\Omega^e} \rho \mathbf{N}^T b\, \mathrm{d}\Omega + \left(\mathbf{N}^T A \bar{t}_x\right)\Big|_{\Gamma_t^e}, \tag{71}$$

josta saadaan muotofunktiot sijoittamalla

$$\mathbf{f}_e^{ext} = 4\pi \int_0^1 \rho b \left[\begin{array}{c} 1-\xi \\ \xi \end{array} \right] (r_{21}\xi + r_1)^2\, r_{21} \mathrm{d}\xi = \frac{\pi \rho b r_{21}}{3} \left\{ \begin{array}{c} r_{21}^2 + 4r_1 r_{21} + 6r_1^2 \\ 3r_{21}^2 + 8r_1 r_{21} + 6r_1^2 \end{array} \right\}. \tag{72}$$

Ulkoisten solmuvoimien yhtälössä (71) esiintyvä sijoitustermi on tässä tapauksessa oletettu nollaksi. Kyseinen termi antaa lisäyksen solmuvoimiin, jos elementin solmu/solmut sijaitsevat tarkastelualueen reunalla, eli tässä tapauksessa pallon sisä- tai ulkopinnalla.