Teknillinen korkeakoulu
Mat-5.187 Epälineaarisen elementtimenetelmän perusteet (Mikkola/Ärölä)
Kaavakokoelma

Transpoosi

$$\begin{aligned}
\mathbf{Au}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{A}^T\mathbf{v} && (1)\\
(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T && (2)\\
(\mathbf{AB})^T &= \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T && (3)\\
(\mathbf{A}^T)^T &= \mathbf{A} && (4)\\
\mathbf{A}^T &= \mathbf{A}, \quad \text{kun } \mathbf{A} \text{ on symmetrinen} && (5)\\
\mathbf{A}^T &= -\mathbf{A}, \quad \text{kun } \mathbf{A} \text{ on vinosymmetrinen} && (6)
\end{aligned}$$

Determinantti

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) && (7)\\
\det(\mathbf{A}^T) &= \det(\mathbf{A}) && (8)\\
\det(\mathbf{A}^{-1}) &= \det(\mathbf{A})^{-1} && (9)
\end{aligned}$$

Käänteistensori

$$\begin{aligned}
(\mathbf{AB})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} && (10)\\
(\mathbf{A}^{-1})^{-1} &= \mathbf{A} && (11)\\
(\mathbf{A}^T)^{-1} &= (\mathbf{A}^{-1})^T && (12)
\end{aligned}$$

Tensoritulo

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_{ij} &= a_i b_j && (13)\\
(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{v} &= (\mathbf{b}\cdot\mathbf{v})\mathbf{a} && (14)\\
(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})^T &= \mathbf{b}\otimes\mathbf{a} && (15)\\
(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}) &= (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}\otimes\mathbf{d} && (16)
\end{aligned}$$

Trace (Jälki)

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\mathbf{A} &= \mathbf{A}:\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{3} A_{ii} && (17)\\
\mathrm{tr}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} && (18)\\
\mathrm{tr}(\mathbf{A}^T) &= \mathrm{tr}(\mathbf{A}) && (19)\\
\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) &= \mathrm{tr}(\mathbf{BA}) && (20)
\end{aligned}$$

Kaksoispistetulo

$$\mathbf{A}:\mathbf{B} = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}B_{ij} \qquad (21)$$

Spektraalihajotelma

Symmetrinen tensori $\mathbf{S}$ voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\,\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{n}_i, \qquad (22)$$

missä $\lambda_i,\ i=1,2,3$ ovat tensorin ominaisarvot ja $\mathbf{n}_i,\ i=1,2,3$ vastaavat ominaisvektorit.

Invariantit
Jos on annettu tensori $\mathbf{S}$, voidaan kirjoittaa

$$\det(\mathbf{S} - \omega \mathbf{I}) = -\omega^3 + I_1(\mathbf{S})\omega^2 - I_2(\mathbf{S})\omega + I_3(\mathbf{S}), \quad \text{kaikilla } \omega \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

missä $I_1(\mathbf{S}), I_2(\mathbf{S}), I_3(\mathbf{S})$ ovat tensorin $\mathbf{S}$ *pääinvariantit*

$$I_1(\mathbf{S}) = \operatorname{tr}(\mathbf{S}) \tag{24}$$

$$I_2(\mathbf{S}) = \frac{1}{2}\big((\operatorname{tr}\mathbf{S})^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{S}^2)\big) \tag{25}$$

$$I_3(\mathbf{S}) = \det \mathbf{S} \tag{26}$$

Suunnattu derivaatta
Funktion $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ suunnattu derivaatta suuntaan $\mathbf{u}$

$$\mathrm{D}\,\mathbf{g}(\mathbf{x})\,[\mathbf{u}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\,\mathbf{g}(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{u})\Big|_{\epsilon=0} \tag{27}$$

Funktio $\mathbf{g}$ voi olla skalaari-, vektori- tai tensoriarvoinen. Samoin argumentti $\mathbf{x}$ voi olla skalaari,vektori tai korkeamman kertaluvun tensori.

Tulon derivointi
Olkoon $\mathbf{f}$ ja $\mathbf{g}$ derivoituvia pisteessä $\mathbf{x}$. Tällöin on myös näiden tulo $\mathbf{h} = \pi(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ derivoituva kyseisessä pisteessä $\mathbf{x}$ ja on voimassa

$$\mathrm{D}\mathbf{h}(\mathbf{x})[\mathbf{u}] = \pi(\,\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathrm{D}\mathbf{g}(\mathbf{x})[\mathbf{u}]\,) + \pi(\,\mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{x})[\mathbf{u}], \mathbf{g}(\mathbf{x})\,) \tag{28}$$

Ketjusääntö
Olkoon $\mathbf{g}$ derivoituvia pisteessä $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{f}$ derivoituvia pisteessä $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Tällöin on myös näiden yhdiste $\mathbf{h} = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ derivoituva ja on voimassa

$$\mathrm{D}\mathbf{h}(\mathbf{x})[\mathbf{u}] = \mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))[\mathrm{D}\mathbf{g}(\mathbf{x})[\mathbf{u}]] \tag{29}$$

Tärkeä sovellus:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{f}(\mathbf{g}(t)) = \mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{g}(t))[\dot{\mathbf{g}}(t)] \tag{30}$$

Gradientti
Skalaariarvoiselle funktiolle f

$$\mathbf{u} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = \mathrm{D}\,f(\mathbf{x})\,[\mathbf{u}] \tag{31}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathbf{e}_i \tag{32}$$

Vektoriarvoiselle funktiolle $\mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathrm{D}\,\mathbf{v}(\mathbf{x})\,[\mathbf{u}] \tag{33}$$

$$\nabla \mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \tag{34}$$

Tensoriarvoiselle funktiolle $\mathbf{S}$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathrm{D}\,\mathbf{S}(\mathbf{x})\,[\mathbf{u}] \tag{35}$$

$$\nabla \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{\partial S_{jk}}{\partial x_i}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \tag{36}$$

Huom! Monissa kirjoissa on gradientti määritelty toisella tavalla. Esim. $\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = \mathrm{D}\,\mathbf{v}(\mathbf{x})\,[\mathbf{u}]$, jolloin $\nabla_{mk}\mathbf{v} = (\nabla_{tk}\mathbf{v})^T$, missä alaindeksit mk = muu kirjallisuus ja tk = tämän kurssin kirja.

Divergenssi
Vektoriarvoiselle funktiolle $\mathbf{v}$

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = \mathrm{tr}(\nabla \mathbf{v}) = \nabla \mathbf{v} : \mathbf{I} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \tag{37}$$

Tensoriarvoiselle funktiolle $\mathbf{S}$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{S} = \nabla \mathbf{S} : \mathbf{I} = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial S_{ji}}{\partial x_j}\,\mathbf{e}_i \tag{38}$$

Huom! Koska monissa kirjoissa on gradientti määritelty toisella tavalla, saadaan myös toisen kertaluvun tensorin divergenssille erilainen lauseke kuin tässä.