

MS-C1420 Fourier-analyysi osa II

G. Gripenberg

Aalto-yliopisto

14. helmikuuta 2014

💡 Fourier-kertoimien numeerinen laskeminen

Jos 1-jaksollisesta signaalista s on saatu havainnot $\mathbf{q}(j) = s\left(\frac{j}{N}\right)$, $j = 0, 1, \dots, N - 1$ ja halutaan laskea Fourier-kertoimien $\hat{s}(k)$ approksimaatioita niin voidaan menetellä seuraavalla tavalla: Muodostetaan ensin s :n korvikkeena funktio

$$g(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{q}(j) p_N\left(t - \frac{j}{N}\right),$$

missä $p_N(t + 1) = p_N(t)$ ja

$$p_N(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t = \frac{k}{N}, k = 1, 2, \dots, N - 1, \end{cases}$$

jolloin siis $g\left(\frac{j}{N}\right) = \mathbf{q}(j) = s\left(\frac{j}{N}\right)$ kaikilla j . Tämän funktion Fourier-kertoimet ovat

$$\hat{g}(k) = \hat{\mathbf{q}}(k) \widehat{p}_N(k).$$

Miksi?

Funktion g Fourier-kertoimiksi saadaan

$$\begin{aligned}\hat{g}(k) &= \int_0^1 e^{-i2\pi kt} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{q}(j) p_N \left(t - \frac{j}{N} \right) dt \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{i2\pi kj}{N}} \mathbf{q}(j) \int_0^1 e^{-i2\pi k(t - \frac{j}{N})} p_N \left(t - \frac{j}{N} \right) dt = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{i2\pi kj}{N}} \mathbf{q}(j) \int_{-\frac{j}{N}}^{1 - \frac{j}{N}} e^{-i2\pi kt} p_N(t) dt \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{i2\pi kj}{N}} \mathbf{q}(j) \widehat{p}_N(k) = \hat{\mathbf{q}}(k) \widehat{p}_N(k).\end{aligned}$$

💡💡 Jaksolliset funktiot

Jos $s \in L^1(\mathbb{R})$ ja siitä tehdään jaksollien funktio s_J kaavalla

$$s_J(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} s(t - j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} s(t + j)$$

niin $s_J \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ja

$$\hat{s}_J(k) = \hat{s}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tämä ei välttämättä onnistu jos ainoastaan oletetaan, että $s \in L^2(\mathbb{R})$.

Miksi

Koska $e^{-i2\pi kj} = 1$, $k, j \in \mathbb{Z}$ niin muuttujan vaihdolla $t = \tau + j$ saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi kt} s(t) dt &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_j^{j+1} e^{-i2\pi kt} s(t) dt = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^1 e^{-i2\pi k(\tau+j)} s(\tau+j) d\tau \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^1 e^{-i2\pi k\tau} s(\tau+j) d\tau = \int_0^1 e^{-i2\pi k\tau} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} s(\tau+j) \right) d\tau. \end{aligned}$$

💡 Esimerkki jaksollistamisesta

Jos $N > 1$ ja $p \in L^1(\mathbb{R})$ on sellainen, että $p(0) = 1$, $p(j) = 0$ kaikilla $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ja

$$p_N(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} p(N(t - j))$$

niin silloin $p_N(t + 1) = p_N(t)$, $p_N(t) = 1$ kun $t = 0$ ja $p_N(t) = 0$ kun $t = \frac{k}{N}$ ja $k = 1, 2, \dots, N - 1$. Lisäksi pätee

$$\widehat{p_N}(k) = \frac{1}{N} \widehat{p}\left(\frac{k}{N}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

💡💡 Poissonin summakaava

Jos $s \in L^1(\mathbb{R})$, s on jatkuva kokonaislukupisteissä ja jono $\sum_{j=-N}^N s(t+j)$ suppenee tasaisesti kun $t \in (-\delta, \delta)$ kun $N \rightarrow \infty$ missä $\delta > 0$ niin $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N s(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \frac{N-|k|}{N} \hat{s}(k)$ ja jos esim. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |s(k)| < \infty$ ja $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{s}(k)| < \infty$ niin pätee

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(k).$$

💡 Huom!

Soveltamalla tätä tulosta tyyppiä $t \mapsto s(t-x)$, $t \mapsto e^{i2\pi xt} s(t)$ ja $t \mapsto s(at)$ oleviin funktioihin ja niiden kombinaatioihin saadaan lisää kaavoja.

Miksi Poissonin summakaava on voimassa

Kyse on oleellisesti siitä missä mielessä, jos lainkaan, käänteiskaava

$$s_J(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi k \cdot t} \hat{s}_J(k) \text{ pätee kun } t = 0.$$

Olkoon $g(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=-N}^N s(t+j)$ *jolloin* $g \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *ja*

$\hat{g}(k) = \hat{s}(k)$. *Oletuksesta, että jono* $\sum_{j=-N}^N s(t+j)$ *suppenee tasaisesti*
kun $t \in (0, \delta)$ *seuraa, että* g *on jatkuva pisteessä* 0 . *Silloin pätee*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (F_N * g)(0) = g(0)$$

missä $F_N = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(N\pi t)}{\sin(\pi t)} \right)^2$ *ja koska toisaalta*

$$(F_N * g)(0) = \sum_{k=-N}^N \frac{N - |k|}{N} e^{i2\pi k \cdot 0} \hat{g}(k) = \sum_{k=-N}^N \frac{N - |k|}{N} \hat{s}(k)$$

niin saadaan väite g :*n määritelmästä. Jos* $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |s(k)| < \infty$ *ja*

$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{s}(k)| < \infty$ *rajat-arvot voidaan ottaa ja saadaan väite*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(k).$$

💡 Whittaker-Shannonin interpolointikaava

Jos $s \in L^2(\mathbb{R})$ ja $\hat{s}(\nu) = 0$ kun $|\nu| > \frac{1}{2}$ niin

$$s(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k) \operatorname{sinc}(t - k) \quad t \in \mathbb{R},$$

missä $\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ jos $t \neq 0$ ja 1 jos $t = 0$.

Jos $s \in L^1(\mathbb{R})$ ja $\hat{s}(\nu) = 0$ kun $|\nu| > \frac{1}{2}$ niin $s \in L^2(\mathbb{R})$ ja oletuksesta $s \in L^2(\mathbb{R})$ seuraa, että $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |s(k) \operatorname{sinc}(t - k)| < \infty$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

💡 Vaimennetut distribuutiot

$$S'(\mathbb{R}) = \{ h : h \text{ on jatkuva ja lineaarinen funktio: } S(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \}.$$

😊 Jatkuvuus?

Funktio $h : S(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ on jatkuva jos $\lim_{n \rightarrow \infty} h(\psi_n) = h(\psi)$ kun $\psi_n, \psi \in S(\mathbb{R})$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \psi$ eli $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\psi_n, \psi) = 0$ missä

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-(k+m)} \frac{\sup_{t \in \mathbb{R}} |t^k(\varphi^{(m)}(t) - \psi^{(m)}(t))|}{1 + \sup_{t \in \mathbb{R}} |t^k(\varphi^{(m)}(t) - \psi^{(m)}(t))|}.$$

Näin ollen funktio $h : S(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ on jatkuva jos jokaisella $\psi \in S(\mathbb{R})$ ja jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten että jos $\varphi \in S(\mathbb{R})$ ja $d(\varphi, \psi) < \delta$ niin $|h(\varphi) - h(\psi)| < \epsilon$.

💡 Vaimennetun distribuution Fourier-muunnos

Jos $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ niin $\hat{h} = \mathcal{F}(h)$ on vaimennettu distribuutio

$$\hat{h}(\psi) = h(\hat{\psi}).$$

💡 Huom!

Jotta voidaan osoittaa, että $\hat{h} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ jos $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ pitää ensin osoittaa että Fourier-muunnos on jatkuva: $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$. (Lineaarisuus on melkein itsestään selvä asia.)

😊 Esimerkki

Jos $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on mitallinen ja on olemassa $m \geq 0$ siten, että $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|(1 + |t|)^{-m} dt < \infty$ niin voidaan määrittellä vaimennettu distribuutio $s_{\rightarrow D}$ (tai pelkästään s) kaavalla

$$s_{\rightarrow D}(\psi) = \int_{\mathbb{R}} s(t)\psi(t) dt.$$

Jos $s_{\rightarrow D}(\psi) = 0$ kun $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, eli $s_{\rightarrow D} = 0$, niin $s(t) = 0$ melkein kaikilla t .

💡💡 Diracin δ_T -funktio

Voidaan määritellä vaimennettu distribuutio δ_T seuraavasti:

$$\delta_T(\psi) = \psi(T).$$

Jos $p \in L^1(\mathbb{R})$ on sellainen, että $\int_{\mathbb{R}} p(t) dt = 1$, esim. $p(t) = e^{-\pi t^2}$, ja merkitään $p_a(t) = ap(at)$ niin

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} p_a(t - T)\psi(t) dt = \psi(T),$$

joten δ_T on funktioiden $p_a(t - T)$ raja-arvo distribuutiomielessä.

Distribuution δ_T Fourier-muunnos $\widehat{\delta_T}$ on määritelmän mukaan distribuutio jonka arvo testifunktiolla ψ on

$$\widehat{\delta_T}(\psi) = \delta_T(\widehat{\psi}) = \widehat{\psi}(T) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi T\nu} \psi(\nu) d\nu,$$

eli funktion $t \mapsto e^{-i2\pi T\nu}$ generoima distribuutio.

💡💡 Diracin δ -funktio, jatk.

Funktion $p_a(t - T)$ Fourier-muunnos on

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\nu t} a p(a(t - T)) dt &\stackrel{a(t - T) = \tau}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\frac{\nu}{a}\tau} e^{-i2\pi T\nu} p(\tau) d\tau \\ &= e^{-i2\pi T\nu} \hat{p}\left(\frac{\nu}{a}\right), \end{aligned}$$

koska $dt = \frac{1}{a}d\tau$ ja $t = \frac{\tau}{a} + T$. Kun $a \rightarrow \infty$ saadaan raja-arvona funktio $e^{-i2\pi T\nu}$ koska $\lim_{a \rightarrow \infty} \hat{p}\left(\frac{\nu}{a}\right) = \hat{p}(0) = \int_{\mathbb{R}} p(t) dt = 1$ oletuksen mukaan, jolloin taas nähdään että δ_T :n Fourier-muunnos on funktio $e^{-i2\pi T\nu}$ (tai tämän funktion generoima distribuutio).

💡 Vaimennetun distribuution Fourier-muunnos on järkevästi määritelty!

Jos $s \in L^1(\mathbb{R})$ tai $s \in L^2(\mathbb{R})$ niin

$$\widehat{s_{\rightarrow D}} = (\hat{s})_{\rightarrow D} \quad \text{eli} \quad \mathcal{F}(s_{\rightarrow D}) = \mathcal{F}(s)_{\rightarrow D}.$$

Miksi?

Jos esim. $s \in L^1(\mathbb{R})$ niin määritelmän mukaan

$$\mathcal{F}(s_{\rightarrow D})(\psi) = s_{\rightarrow D}(\hat{\psi}) = \int_{\mathbb{R}} s(t)\hat{\psi}(t) dt.$$

Koska sekä s että $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ niin kertolaksukaavan nojalla, joka pätee myös kuin kuin molemmat funktiot ovat neliöintegroituvia,

$$\int_{\mathbb{R}} s(t)\hat{\psi}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{s}(t)\psi(t) dt = (\hat{s})_{\rightarrow D}(\psi),$$

ja koska $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ oli mielivaltainen, niin väite seuraa.

💡 Vaimennetun distribuution derivaatta

Jos $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ niin sen derivaatta h' määritellään kaavalla

$$h'(\varphi) = -h(\varphi').$$

Kun todistetaan, että h' on vaimennettu on ensin osoitettava, että derivointi on jatkuva funktio: $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Miksi näin?

Jos s on derivoituva funktio ja on olemassa $m \geq 0$ siten, että $\int_{\mathbb{R}} (|s(t)| + |s'(t)|)(1 + |t|)^{-m} dt$ niin $s_{\rightarrow D}$ ja $(s')_{\rightarrow D}$ ovat vaimennettuja distribuutioita ja pätee

$$\begin{aligned}(s_{\rightarrow D})'(\psi) &= -s_{\rightarrow D}(\psi') = -\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\psi'(t) dt \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\psi(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} s'(t)\psi(t) dt = (s')_{\rightarrow D}(\psi).\end{aligned}$$

😊 Operaatioita vaimennetuilla distribuutioilla

Kun s on funktio $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ voimme määritellä seuraavat operaatiot:

$$(T_x s)(t) = s(t - x),$$

$$(M_x s)(t) = e^{i2\pi xt} s(t),$$

$$(C_x s)(t) = s(xt) \quad (\text{missä } x \neq 0)$$

ja ehdosta $L_x s \rightarrow D = (L_x s) \rightarrow D$ missä $L = T, M$ tai S , niin saadaan seuraavat määritelmät vaimennetuille distribuutioille:

$$(T_x h)(\psi) = h(T_{-x} \psi),$$

$$(M_x h)(\psi) = h(M_x \psi),$$

$$(C_x h)(\psi) = h\left(\frac{1}{|x|} C_{\frac{1}{x}} \psi\right).$$

Lisäksi jos $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ja $\sup_{t \in \mathbb{R}} (1 + |t|)^{-k(m)} |\varphi^{(m)}(t)| < \infty$ kaikilla m jollain $k(m)$ niin määritellään funktion φ ja vaimennetun distribuution h tulo kaavalla

$$(\varphi h)(\psi) = h(\varphi \psi).$$

💡 Fourier-muunnos ja derivaatta

Jos $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ niin

$$\mathcal{F}(h)' = \mathcal{F}((-i2\pi t)h),$$

$$\mathcal{F}(h') = (i2\pi t)\mathcal{F}(h).$$

Miksi ?

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(h)'(\psi) &= -\mathcal{F}(h)(\psi') = -h(\mathcal{F}(\psi')) \\ &= -h((i2\pi t)\mathcal{F}(\psi)) = ((-i2\pi t)h)(\mathcal{F}(\psi)) = \mathcal{F}((-i2\pi t)h)(\psi),\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(h')(\psi) &= h'(\mathcal{F}(\psi)) = -h(\mathcal{F}(\psi)') \\ &= -h(\mathcal{F}((-i2\pi t)\psi)) = \mathcal{F}(h)((i2\pi t)\psi) = ((i2\pi t)\mathcal{F}(h))(\psi).\end{aligned}$$

💡 Jaksollisen funktion Fourier-muunnos

Jos $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ niin s määrittelee myös funktion: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ siten, että $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|(1 + |t|)^{-2} dt < \infty$ ja silloin

$$\widehat{s}_{\rightarrow D} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(k) \delta_k,$$

missä $\hat{s}(k)$ on s :n Fourier-kerroin ja $\delta_{\tau}(\psi) = \psi(\tau)$.

Jaksollisen funktion Fourier-muunnos

Määritelmän mukaan

$$\widehat{s \rightarrow D}(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \hat{\psi}(t) dt.$$

Koska $\hat{\psi} \in \mathcal{S}$ niin funktio $\varphi(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(-t + j)$ on jaksollinen ja äärettömän monta kertaa derivoituva. Näin ollen se voidaan kirjoittaa Fourier-summana

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi kt} \hat{\varphi}(k).$$

Koska s on jaksollinen niin

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \hat{\psi}(t) dt &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_j^{j+1} s(t) \hat{\psi}(t) dt = \int_0^1 s(t) \varphi(-t) dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(k) \int_0^1 e^{-i2\pi kt} s(t) dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(k) \hat{s}(k), \end{aligned}$$

Jaksollisen funktion Fourier-muunnos, jatk.

missä \hat{s} tarkoittaa jaksollisen funktion Fourier-muunnos. Toisaalta

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(k) &= \int_0^1 e^{-i2\pi kt} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(-t + j) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi kt} \hat{\psi}(-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi kt} \hat{\psi}(t) dt = \psi(k).\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\widehat{s \rightarrow D}(\psi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(k) \psi(k),$$

eli

$$\widehat{s \rightarrow D} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(k) \delta_k.$$

💡 Aliasoituminen I

Olkoon s jatkuva-aikainen signaali jonka Fourier-muunnos $\hat{s} \in L^1(\mathbb{R})$ jolloin s on ainakin jatkuva funktio siten, että $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0$. Jos nyt otetaan näytteitä $s(k\Delta t)$, $k \in \mathbb{Z}$, tästä signaalista niin Fourier-muunnoksen käänteiskaavan nojalla ne voidaan esittää Fourier-muunnoksen \hat{s} avulla seuraavasti:

$$s(k\Delta t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi k\Delta t\nu} \hat{s}(\nu) d\nu.$$

Mutta funktio $\nu \rightarrow e^{i2\pi k\Delta t\nu}$ on jaksollinen jaksolla $\Delta\nu = \frac{1}{\Delta t}$ joten jos nyt määritellään $\hat{s}_{J,\Delta\nu}(\nu) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{s}(\nu - j\Delta\nu)$ niin

$$s(k\Delta t) = \int_0^{\Delta\nu} e^{i2\pi k\Delta t\nu} \hat{s}_{J,\Delta\nu}(\nu) d\nu = \int_{-\frac{\Delta\nu}{2}}^{\frac{\Delta\nu}{2}} e^{i2\pi k\Delta t\nu} \hat{s}_{J,\Delta\nu}(\nu) d\nu.$$

Näin funktio $\hat{s}_{J,\Delta\nu}(\nu)$ määrittää jonon $s(k\Delta t)$ ja päinvastoin eikä jälkimmäisen jonon avulla ole mahdollista sanoa luvuista $\hat{s}(\nu - j\Delta\nu)$ muuta kuin niiden summa.

Aliasoituminen I, jatk.

Toisaalta jos \hat{s} on nolla tietyn $\Delta\nu$ -pituisen välin ulkopuolella, niin silloin on mahdollista rekonstruoida signaali lukujen $s(k\Delta t)$ avulla Whittaker-Shannonin interpolointikaavan (modifikaation) avulla.

💡💡 Aliasoituminen II

Tarkastellaan seuraavaksi mahdollisimman yksinkertainen signaali eli $s(t) = e^{i2\pi\nu t}$ jonka taajuus on ν ja poikkeuksena edelliseen tapaukseen otetaan nyt vain N näytettä $\mathbf{q}(k) = s(t_0 + k\Delta t)$, $k = 0, \dots, N-1$. Nämä näytteet määräytyvät yksikäsitteisesti tämän jonon diskreetistä Fourier-muunnoksesta

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{q}}(m) &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{mk}{N}} s(t_0 + k\Delta t) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{mk}{N}} e^{i2\pi\nu(t_0 + k\Delta t)} \\ &= e^{-i2\pi\nu t_0} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi k(\nu\Delta t - \frac{m}{N})}.\end{aligned}$$

💡💡 Aliasoituminen II, jatk.

Funktion $e^{i2\pi t}$ jaksollisuudesta ja geometrisen sarjan summakaavasta seuraa, että

$$\hat{q}(m) = \begin{cases} Ne^{i2\pi\nu t_0}, & \text{jos } e^{i2\pi(\text{mod}(\nu\Delta t, 1) - \frac{m}{N})} = 1, \\ e^{i2\pi\nu t_0} \frac{1 - e^{i2\pi(N\text{mod}(\nu\Delta t, 1) - m)}}{1 - e^{i2\pi(\text{mod}(\nu\Delta t, 1) - \frac{m}{N})}}, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Näin ollen ainoa tieto taajuudesta joka saadaan diskreetistä Fourier-muunnoksesta ja siten myös jonosta $s(t_0 + k\Delta t)$ on $\text{mod}(\nu\Delta t, 1)$ ja se näkyy siten, että diskreetti Fourier-muunnos saa itseisarvoltaan suurimmat arvonsa kun $\frac{m}{N} \approx \text{mod}(\nu\Delta t, 1)$.

Muista myös, että jokainen vaimennettu distribuutio on trigonometrinen polynomien raja-arvo (tosin aika heikossa mielessä), ja yllä oleva lasku on myös sovellettavissa niihin.

😊 "Aikataajuudessa rajoitettu signaali on 0"

Ainoa funktio $s \in L^1(\mathbb{R})$ jolle on olemassa $M < \infty$ siten, että $s(t) = 0$ kun $|t| \geq M$ ja $\hat{s}(\nu) = 0$ kun $|\nu| \geq M$ on $s = 0$.

"Aikataajuudessa rajoitettu signaali on 0"

Olkoon s tällainen funktio. Määritellään sen avulla funktio

$q(t) = s(4Mt + M)$ jolloin nähdään, että $q(t) = 0$ kun $t \leq -\frac{1}{2}$ ja kun $t \geq 0$. Seuraavaksi muodostetaan tämän funktion jaksollistus

$q_J(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} q(t - j)$ jolle siis pätee, että $q_J(t) = 0$ kun $t \in [0, \frac{1}{2}]$. Koska

$\hat{q}(\nu) = e^{i2\pi\frac{\nu}{4}} \hat{s}(\frac{\nu}{4M})$ niin $\hat{q}(\nu) = 0$ kun $|\nu| \geq 4M^2$. Erityisesti tämä

tarkoittaa sitä, että q_J :llä on ainoastaan äärellisen monta nollasta

poikkeavaa Fourier-kerrointa koska $\hat{q}_J(k) = \hat{q}(k)$. Näin ollen q voidaan

esittää Fourier-summana

$$q(t) = \sum_{k=-m}^m e^{i2\pi kt} \hat{q}(k),$$

ja voimme olettaa, että $|\hat{q}(-m)| + |\hat{q}(m)| > 0$ jos $s \neq 0$ jolloin $q \neq 0$.

"Aikataajuudessa rajoitettu signaali on 0", jatk.

Koska Fourier-summa sisältää vain äärellisen monta termiä niin q on äärettömän monta kertaa jatkuvasti derivoituva ja koska $q(t) = 0$ kun $0 < t < \frac{1}{2}$ niin myös kaikki sen derivaatat ovat 0 tällä välillä ja jatkuvuuden nojalla myös pisteessä $t = 0$ eli

$$0 = \frac{q^{(j)}(0)}{(i2\pi m)^j} = \sum_{k=-m}^m \left(\frac{k}{m}\right)^j \hat{q}(k).$$

Nyt pätee $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=-m+1}^{m-1} \left(\frac{k}{m}\right)^j \hat{q}(k) e^{i2\pi kt} = 0$ joten saadaan

$$\lim_{j \rightarrow \infty} ((-1)^j \hat{q}(-m) + \hat{q}(m)) = 0,$$

josta seuraa, että $\hat{q}(-m) = \hat{q}(m) = 0$ ja $s = 0$.

💡 Ikkunoitu Fourier-muunnos

Jos s signaali ja w on "ikkuna"-funktio niin s :n w -ikkunoitu Fourier-muunnos on

$$F(s, w)(\tau, \nu) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\nu t} s(t) \overline{w(t - \tau)} dt.$$

eli $F(s, w)(\tau, \nu) = \mathcal{F}(s \overline{T_{\tau} w})(\nu)$ ja oletetaan, että w on valittu siten, että signaalin $s(t) \overline{T_{\tau} w(t)}$ Fourier-muunnos on hyvin määritelty. (Useimmiten ikkunafunktio w reaalinen, esim $w(t) = e^{-\beta t^2}$ jolloin kompleksikonjugoinnilla ei ole merkitystä.)

Miksi ikkunointia?

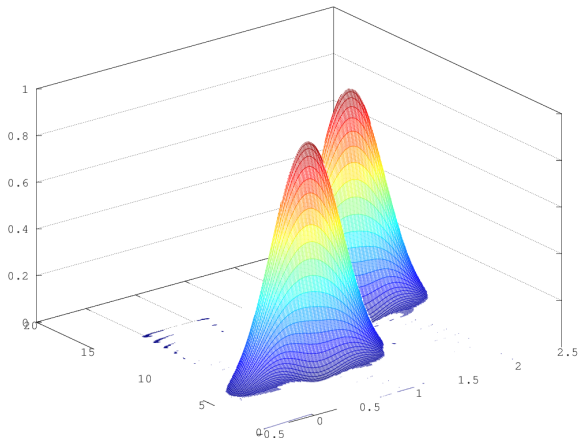
Ikkunoitu Fourier-muunnos antaa jotakin informaatiota signaalin s sisältämistä taajuuksista lyhyellä aikavälillä mutta ei ole suinkaan ainoa korjausyritys Fourier-muunnoksen heikoimpiin puoliin, jotka liittyvät siihen, että sen arvo tietyssä pisteessä riippuu signaalin arvoista kaikissa pisteissä.

Miksi ikkunointia?

Kuten Fourier-sarjojen kohdalla voidaan todeta, saadaan yleensä parempi tulos kun signaali rekonstruoidaan Fourier-kertoimista jos käytetään painotettu summa $\sum_{k=-N}^N \frac{N-|k|}{N} \hat{s}(k) e^{i2\pi kt}$ kuin jos lasketaan $\sum_{k=-N}^N \hat{s}(k) e^{i2\pi kt}$. Tässä tapauksessa käytetään siis diskreettiä ikkunafunktiota $w(k) = \frac{N-|k|}{N}$. Toisin sanoen, kun lasketaan Fourier-muunnoksia ja käänteismuunnoksia voi olla hyvä idea käyttää ikkunointia kiinteällä τ :n arvolla (esim. 0) ja valita ikkunafunktioksi esim. $e^{-\epsilon t^2}$ missä ϵ on pieni positiivinen luku.

😊 Esimerkki

Alla olevassa kuvassa on esitetty signaalin s ikkunoidun Fourier-muunnoksen itseisarvo ikkunafunktiolla $w(t) = e^{-4t^2}$ missä $s(t) = \sin(2\pi 5t)$ kun $0 \leq t \leq 1$, $s(t) = \sin(2\pi 10t)$ kun $1 \leq t \leq 2$ ja $s(t) = 0$ muuten.



💡 Ikkunoidun Fourier-muunnoksen käänteismuunnos ja energia

Jos $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (mikä on järkevä valinta) ja $\sup_{t \in \mathbb{R}} |s(t)|(1 + |t|)^{-m} < \infty$ jollain $m \geq 0$ niin Fourier-muunnoksen käänteismuunnoksella saadaan $s(t) = \overline{(w(t - \tau))}^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\nu t} F(s, w)(\tau, \nu) d\nu$, jos $w(t - \tau) \neq 0$. Mutta jos sen sijaan, että käänteismuunnoskaavassa jaetaan $\overline{w(t - \tau)}$:llä kerrotaan $w(t - \tau)$:lla ja integroidaan τ :n suhteen saadaan

$$s(t) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} |w(\tau)|^2 d\tau} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\nu t} F(s, w)(\tau, \nu) w(t - \tau) d\nu d\tau$$

Koska $\int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(\nu)|^2 d\nu = \int_{\mathbb{R}} |h(t)|^2 dt$ ja $\nu \mapsto F(s, w)(\tau, \nu)$ on Fourier-muunnos niin

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |F(s, w)(\tau, \nu)|^2 d\nu d\tau &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 |w(t - \tau)|^2 dt d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} |w(\tau)|^2 d\tau \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |w(\tau)|^2 d\tau \int_{\mathbb{R}} |\hat{s}(\nu)|^2 d\nu, \end{aligned}$$

eli ikkunoitu Fourier-muunnos jakaa signaalin "energian" toisella tavalla tasoon \mathbb{R}^2 .

😊 Ikkunoitu Fourier-muunnos konvoluutiona

Määritelmän mukaan

$$F(s, w)(\tau, \nu) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\nu t} s(t) \overline{w(t - \tau)} dt.$$

Oletetaan, että ikkuna-funktio $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Seuraavaksi esitetään funktio $t \mapsto e^{-i2\pi\nu t} \overline{w(t - \tau)}$ Fourier-muunnoksena ja käänteismuunnoksen avulla todetaan, että

$$\begin{aligned} e^{-i2\pi\nu t} \overline{w(t - \tau)} &= e^{-i2\pi\nu t} \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(t-\tau)\mu} \widehat{w}(\mu) d\mu} \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi t(\mu+\nu)} e^{i2\pi\tau\mu} \overline{\widehat{w}(\mu)} d\mu \\ &\stackrel{\mu + \nu = \gamma}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi t\gamma} e^{-i2\pi\tau(\nu-\gamma)} \overline{\widehat{w}(\gamma - \nu)} d\gamma. \end{aligned}$$

Nyt $\overline{\widehat{w}(\gamma - \nu)} = \widehat{\overline{w}}(\nu - \gamma)$ ja näin ollen funktio $t \mapsto e^{-i2\pi\nu t} \overline{w(t - \tau)}$ on funktion $\gamma \mapsto e^{-i2\pi\tau(\nu-\gamma)} \widehat{\overline{w}}(\nu - \gamma)$ Fourier-muunnos.

😊 Ikkunoitu Fourier-muunnos konvoluutiona, jatk.

Kertolaskukaavan nojalla pätee

$$F(s, w)(\tau, \nu) = \int_{\mathbb{R}} \hat{s}(\gamma) e^{-i2\pi\tau(\nu-\gamma)} \widehat{w}(\nu - \gamma) d\gamma = (\hat{s} * (M_{-\tau}\widehat{w}))(\nu).$$

missä siis $M_x\psi(t) = e^{i2\pi xt}\psi(t)$.

Huomaa, että kertolaskukaavan käyttö kuten edellä edellyttää että esim $s \in L^1(\mathbb{R})$ tai $s \in L^2(\mathbb{R})$ mutta vaimennetun distribuution

*Fourier-muunnoksen määritelmä on sama kaava joten yllä oleva tulos pätee myös jos s on vaimennettu distribuutio koska jos $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ja $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ niin $(h * \psi)(x)$ on distribuution h arvo testifunktiolla $t \mapsto \psi(x - t)$.*

💡 Diskreetti konvoluutio

Jos $\mathbf{a} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ja $\mathbf{b} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ovat esim. sellaisia, että $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathbf{a}(j)| < \infty$ ja $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathbf{b}(j)| < \infty$ niin niiden konvoluutio $\mathbf{a} * \mathbf{b}$ on

$$(\mathbf{a} * \mathbf{b})(k) = \mathbf{c}(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{a}(k - j) \mathbf{b}(j), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Kun tällaisen signaalin Fourier-muunnos on

$$\hat{\mathbf{a}}(\nu) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi\nu j} \mathbf{a}(j),$$

niin pätee

$$\widehat{\mathbf{a} * \mathbf{b}}(\nu) = \hat{\mathbf{a}}(\nu) \hat{\mathbf{b}}(\nu).$$

😊 Diskreetti jaksollinen konvoluutio

Jos signaalit $\mathbf{a} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ja $\mathbf{b} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ovat jaksollisia jaksolla N niin niiden (jaksollinen) konvoluutio $\mathbf{a} *_J \mathbf{b}$ on

$$(\mathbf{a} *_J \mathbf{b})(k) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{a}(k-j)\mathbf{b}(j),$$

ja pätee

$$\widehat{\mathbf{a} *_J \mathbf{b}}(m) = \hat{\mathbf{a}}(m)\hat{\mathbf{b}}(m), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

💡💡 Konvoluutio \mathbb{N}_0 :ssa

Jos $\mathbf{a} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ja $\mathbf{b} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ovat sellaisia että $\mathbf{a}(j) = \mathbf{b}(j) = 0$ kun $j < 0$ niin

$$(\mathbf{a} * \mathbf{b})(k) = \sum_{j=0}^k \mathbf{a}(k-j)\mathbf{b}(j), \quad k \geq 0,$$

ja $(\mathbf{a} * \mathbf{b})(k) = 0$ kun $k < 0$ ja kaikilla k on laskettava ainoastaan äärellinen summa.

💡💡 Konvoluution laskeminen Fourier-muunnoksen avulla

Jos luvut $\mathbf{a}(j)$ ja $\mathbf{b}(j)$ tunnetaan kun $j = 0, \dots, N - 1$ ja halutaan laskea

$$(\mathbf{a} * \mathbf{b})(k) = \sum_{j=0}^k \mathbf{a}(k-j)\mathbf{b}(j), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

niin voidaan menetellä seuraavalla tavalla: Määritellään

$$\mathbf{a}_{2N}(j) = \begin{cases} \mathbf{a}(j), & j = 0, \dots, N-1, \\ 0, & j = N, \dots, 2N-1, \end{cases} \quad \mathbf{a}_{2N}(j) = \mathbf{a}_{2N}(j+2N), \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$\mathbf{b}_{2N}(j) = \begin{cases} \mathbf{b}(j), & j = 0, \dots, N-1, \\ 0, & j = N, \dots, 2N-1, \end{cases} \quad \mathbf{b}_{2N}(j) = \mathbf{b}_{2N}(j+2N), \quad j \in \mathbb{Z},$$

Sitten lasketaan

$$\mathbf{c} = \mathcal{F}_{2N}^{-1}(\mathcal{F}_{2N}(\mathbf{a}_{2N}) \cdot \mathcal{F}_{2N}(\mathbf{b}_{2N}))$$

jolloin

$$\mathbf{c}(k) = (\mathbf{a} * \mathbf{b})(k), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Miksi?

Koska jaksollisten jononjen konvoluution diskreetti Fourier-muunnos on Fourier-muunnosten tulo niin $c = \mathbf{a}_{2N} *_J \mathbf{b}_{2N}$ eli

$$c(k) = \sum_{j=0}^{2N-1} \mathbf{a}_{2N}(k-j)\mathbf{b}_{2N}(j), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Koska $\mathbf{b}_{2N}(j) = \mathbf{b}(j)$ kun $j = 0, \dots, N-1$ ja $\mathbf{b}_{2N}(j) = 0$ kun $j = N, \dots, 2N-1$ niin

$$c(k) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{a}_{2N}(k-j)\mathbf{b}(j), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Mutta jos nyt $0 \leq k \leq N-1$ ja $k+1 \leq j \leq N-1$ niin $-N+1 \leq k-j \leq -1$ jolloin $N+1 \leq k-j+2N \leq 2N-1$ josta seuraa, että $\mathbf{a}_{2N}(k-j) = \mathbf{a}_{2N}(k-j+2N) = 0$. Koska lisäksi $\mathbf{a}_{2N}(k-j) = \mathbf{a}(k-j)$ kun $0 \leq j \leq k \leq N-1$ niin

Miksi?, jatk.

$$\mathbf{c}(k) = \sum_{j=0}^k \mathbf{a}_{2N}(k-j)\mathbf{b}(j) = \sum_{j=0}^k \mathbf{a}(k-j)\mathbf{b}(j), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Jos lisäksi pätee $\mathbf{a}(j) = \mathbf{b}(j) = 0$ kun $j \geq N$ ja $N-1 \leq k \leq 2N-1$ niin

$$\mathbf{c}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{a}_{2N}(k-j)\mathbf{b}(j) = \sum_{j=k-N+1}^{N-1} \mathbf{a}(k-j)\mathbf{b}(j) = \sum_{j=0}^k \mathbf{a}(k-j)\mathbf{b}(j).$$

ja saadaan kaikki konvoluution termit indekseillä $k = 0, 1, \dots, 2N-1$ (ja tässä tapauksessa konvoluutio on 0 kun $k \geq 2N-1$).