

MS-C1420 Fourier-analyysi osa I

G. Gripenberg

Aalto-yliopisto

29. tammikuuta 2014

1 Johdanto

2 Fourier-integraali

- Fourier-muunnos ja derivaatta
- Konvoluutio
- Fourier-käänteismuunnos
- Neliöintegroituvat funktiot

3 Diskreetti Fourier-muunnos

4 Fourier-sarjat

- Neliöintegroituvat jaksolliset funktiot

Fourier-muunnoksia

- *Jatkuva-aikaisen jaksottoman signaalin muunnos:*

$$\hat{s}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu t} s(t) dt, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

- *Jaksollisen jatkuva-aikaisen signaalin muunnos (kun jakso on 1):*

$$\hat{s}(k) = \int_0^1 e^{-i2\pi kt} s(t) dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- *Diskreetti Fourier-muunnos (diskreettiaikainen jaksollinen signaali):*

$$\hat{s}(m) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{mj}{N}} s(j), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

- *Diskreettiaikaisen ei-jaksollisen signaalin Fourier-muunnos: $\hat{s}(\nu) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi\nu j} s(j)$.*

Fourier-muunnos on lineaarinen, eli summan muunnos on muunnosten summa ja jos signaali kerrotaan luvulla niin muunnoskin tulee kerrotuksi samalla luvulla.

Eksponttifunktio ja Eulerin kaava

Eksponttifunktion määritelmäksi voidaan ottaa

$$\exp(z) = e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

ja merkinnän e^z perusteluna on kaava $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

Vertaamalla \sin :n ja \cos :n sarjakehitelmiin saadaan Eulerin kaava

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t),$$

missä siis i on imaginaariyksikkö s.e. $i \cdot i = -1$.

Erityisesti pätee $|e^{it}| = 1$, ja $e^{i2\pi k} = 1$, kun $k \in \mathbb{Z}$.

Kompleksiluvun $z = a + ib$ kompleksikonjugaatti \bar{z} on $\bar{z} = a - ib$ joten esim. $\overline{e^{it}} = e^{-it}$. Kompleksikonjugointi on lineaarinen ja multiplikaatiivinen joten pätee esim. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu t} s(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu t} \overline{s(t)} dt$

💡💡 Fourier-muunnos

Jos $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$ ja s on mitallinen eli jatkuvien funktioiden raja-arvo melkein kaikkialla eli $s \in L^1(\mathbb{R})$ niin

$$\hat{s}(\nu) = \mathcal{F}(s)(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi t\nu} s(t) dt, \quad \nu \in \mathbb{R}$$

Jos t on aika niin ν on taajuus!

💡💡 Fourier-käänteismuunnos

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{s})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\nu t} \hat{s}(\nu) d\nu = \mathcal{F}(\hat{s})(-t) \stackrel{\nu = -\omega}{=} \mathcal{F}(\hat{s}(-\omega))(t).$$

Kuten Fourier-muunnoksen määritelmässä ongelmana tässä (todistamisen lisäksi) on että jos $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{s}(\nu)| d\nu = \infty$ (niin kuin usein käy) ei ole heti selvää mitä integraalilla oikein tarkoitetaan mutta sopivilla määritelmillä tähänkin ongelmaan löytyy hyviä ratkaisuja

💡💡 Translaatiot, modulaatiot ja dilaatiot

Jos $s \in L^1(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$ niin

$$\begin{aligned} g(t) = s(t-p) &\Rightarrow \hat{g}(\nu) = e^{-i2\pi\nu p} \hat{s}(\nu), \\ h(t) = e^{i2\pi p t} s(t) &\Rightarrow \hat{h}(\nu) = \hat{s}(\nu-p), \\ k(t) = s(at) &\Rightarrow \hat{k}(\nu) = \frac{1}{|a|} \hat{s}\left(\frac{\nu}{a}\right). \end{aligned}$$

Oletus $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$ ei ole tässä yhteydessä oleellinen muulla tavalla kuin että Fourier-muunnos on toistaiseksi määritetty vain tällaisille funktioille!

Miksi?

$$\begin{aligned} \hat{g}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu t} s(t-p) dt \stackrel{t-p=\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu(\tau+p)} s(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu\tau} e^{-i2\pi\nu p} s(\tau) d\tau = e^{-i2\pi\nu p} \hat{s}(\nu). \end{aligned}$$

Translaatiot, modulaatiot ja dilaatiot, jatk.

$$\begin{aligned} \hat{h}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu t} e^{i2\pi p t} s(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(\nu-p)t} s(t) dt = \hat{s}(\nu-p), \\ \hat{k}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu t} s(at) dt \stackrel{at=\tau, dt=\frac{1}{a}d\tau}{=} \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu\tau/a} s(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(\nu/a)\tau} s(\tau) d\tau = \frac{1}{|a|} \hat{s}\left(\frac{\nu}{a}\right). \end{aligned}$$

Huom!

Jos $s \in L^1(\mathbb{R})$ niin \hat{s} on jatkuva ja $\lim_{|\nu| \rightarrow \infty} \hat{s}(\nu) = 0$ mutta jokainen jatkuva funktio jonka raja-arvo äärettömyydessä on 0 ei ole integroituvan funktion Fourier-muunnos.

💡💡 Fourier-muunnos ja derivaatta

Jos D on derivointiooperaattori ($\frac{d}{d\nu}$ tai $\frac{d}{dt}$) niin

$$D(\mathcal{F}(s))(\nu) = \mathcal{F}((-i2\pi t)s(t))(\nu)$$

ja

$$\mathcal{F}(Ds)(\nu) = i2\pi\nu \mathcal{F}(s)(\nu).$$

Miksi?

Yllä olevat kaavat pätevät, sopivin tulkinnoin, hyvin yleisesti ja jos esim.

$(1+|t|)s(t) \in L^1(\mathbb{R})$ niin voidaan derivoida integraalin sisäpuolella jolloin saadaan

$$D(\mathcal{F}(s))(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\nu} e^{-i2\pi\nu t} s(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu t} (-i2\pi t) s(t) dt.$$

Samoin jos esim. s ja $Ds \in L^1(\mathbb{R})$ ja $s(t) = s(0) + \int_0^t Ds(u) du$ saadaan osittaisintegroinnilla

$$\mathcal{F}(Ds)(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu t} s(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} (-i2\pi\nu) e^{-i2\pi\nu t} s(t) dt = i2\pi\nu \mathcal{F}(s)(\nu).$$

💡 Nopeasti vähenevät funktiot

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{ s : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} : s \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \sup_{t \in \mathbb{R}} |t^k s^{(m)}(t)| < \infty, \quad k, m \geq 0 \}.$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sisältää siis kaikki äärettömän monta kertaa derivoituvat funktiot, joiden kaikki derivaatat suppenevat kohti 0 nopeammin kuin jokainen muotoa t^{-k} oleva funktio kun $|t| \rightarrow \infty$ ja kaikki tyyppiä $t^k s^{(m)}(t)$ olevat funktiot ovat myös integroituvia. Esimerkkinä kelpaa hyvin funktio $h_0(t) = e^{-\pi t^2}$.

💡💡 Fourier-muunnos ja nopeasti vähenevät funktiot

Fourier-muunnos on bijektio: $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$, eli jos $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ niin $\hat{s} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ja jos $q \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ niin on olemassa täsmälleen yksi $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ siten, että $q = \hat{s}$.

Lisäksi pätee $(i2\pi\nu)^k D^m(\mathcal{F}(s))(\nu) = \mathcal{F}(D^k((-i2\pi t)^m s(t)))(\nu)$ kaikilla k ja $m \geq 0$.

💡💡 Kertolaskukaava

Jos g ja $h \in L^1(\mathbb{R})$ niin

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) h(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} g(t) \hat{h}(t) dt.$$

Miksi?

Integroimisjärjestyksen vaihdolla saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) h(\nu) d\nu &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\nu t} g(t) dt \right) h(\nu) d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\nu t} g(t) h(\nu) dt \right) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\nu t} g(t) h(\nu) d\nu \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(t) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\nu t} h(\nu) d\nu \right) dt = \int_{\mathbb{R}} g(t) \hat{h}(t) dt. \end{aligned}$$

😊 Kertolaskukaava, erikoistapaus

Jos s ja $p \in L^1(\mathbb{R})$ niin $\int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\nu t} p(-\nu) \hat{s}(\nu) d\nu = (\hat{p} * s)(t)$.

💡 Konvoluutio

Jos g ja $h \in L^1(\mathbb{R})$ niin $g * h \in L^1(\mathbb{R})$ ja $\int_{-\infty}^{\infty} |(g * h)(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt$ missä

$$(g * h)(t) = \int_{\mathbb{R}} g(t-u) h(u) du.$$

ja erityisesti pätee

$$\widehat{f * g}(\nu) = \hat{f}(\nu) \hat{g}(\nu).$$

😊 Approksimointi konvoluutioilla

Jos $p \in L^1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} p(t) dt = 1$, $p_a(t) = ap(at)$ ja $s \in L^1(\mathbb{R})$ niin

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |s(t) - (p_a * s)(t)| dt = 0,$$

ja jos lisäksi $\lim_{|t| \rightarrow \infty} tp(t) = 0$ ja s on jatkuva pisteessä t niin

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (p_a * s)(t) = s(t).$$

💡💡 Kertolaskukaava

Jos g ja $h \in L^1(\mathbb{R})$ niin

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) h(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} g(t) \hat{h}(t) dt.$$

Miksi?

Integroimisjärjestyksen vaihdolla saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) h(\nu) d\nu &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\nu t} g(t) dt \right) h(\nu) d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\nu t} g(t) h(\nu) dt \right) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\nu t} g(t) h(\nu) d\nu \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(t) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\nu t} h(\nu) d\nu \right) dt = \int_{\mathbb{R}} g(t) \hat{h}(t) dt. \end{aligned}$$

😊 Kertolaskukaava, erikoistapaus

Jos s ja $p \in L^1(\mathbb{R})$ niin $\int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\nu t} p(-\nu) \hat{s}(\nu) d\nu = (\hat{p} * s)(t)$.

💡 Fourier-käänteismuunnos I

Jos $s \in L^1(\mathbb{R})$ niin

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \left| s(t) - \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\nu t} \hat{s}(\nu) e^{-\epsilon\nu^2} d\nu \right| dt = 0.$$

ja

$$s(t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\nu t} \hat{s}(\nu) e^{-\epsilon\nu^2} d\nu$$

kaikissa pisteissä t missä s on jatkuva.

💡 Fourier-käänteismuunnos II

Jos $s \in L^1(\mathbb{R})$ ja $\hat{s} \in L^1(\mathbb{R})$ niin

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\nu t} \hat{s}(\nu) d\nu, \quad t \in \mathbb{R}.$$

💡 Neliöintegroituvat funktiot

Jos $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on mitallinen ja $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt < \infty$ niin $s \in L^2(\mathbb{R})$. Pätee $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ mutta $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$ ja $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$.

Monissa sovelluksissa $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt < \infty$ on signaalin energia tai ainakin verrannollinen energiaan.

Merkitään $\|s\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

💡💡 Fourier-muunnos ja $L^2(\mathbb{R})$ I

Jos g ja $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ niin

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\overline{h(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu)\overline{\hat{h}(\nu)} d\nu.$$

💡💡 Fourier-muunnos ja $L^2(\mathbb{R})$ II

Jos $s \in L^2(\mathbb{R})$ niin on olemassa funktio $\hat{s} \in L^2(\mathbb{R})$ siten, että jos jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $s_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ kun $n \geq 1$ on sellainen, että $\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - s\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$ niin $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{s}_n - \hat{s}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$. Lisäksi pätee $\|s\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{s}\|_{L^2(\mathbb{R})}$ eli

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\hat{s}(\nu)|^2 d\nu.$$

ja jos g ja $h \in L^2(\mathbb{R})$ niin

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\overline{h(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu)\overline{\hat{h}(\nu)} d\nu.$$

💡 Huom!

Jos $s \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ niin \hat{s} tulee määrittelyksi kahdella eri tavalla, toisaalta suoraan integraalina koska $f \in L^1(\mathbb{R})$ ja toisaalta raja-arvona $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{s}_n$, missä $s_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, mutta nämä määritelmät antavat saman tuloksen.

Jos $s \in L^2(\mathbb{R})$ niin pätee myös

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{s}(\nu) - \int_{-T}^T e^{-i2\pi\nu t} s(t) dt \right|^2 d\nu = 0.$$

💡💡 Diskreetti Fourier-muunnos

Jos N on positiivinen kokonaisluku niin lukujen $\mathbf{s}(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ diskreetti Fourier-muunnos on

$$\mathcal{F}_N(\mathbf{s})(m) = \hat{\mathbf{s}}(m) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{i2\pi m j}{N}} \mathbf{s}(j), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

💡 Huom!

- Diskreetti Fourier-muunnos määritellään usein kaavoilla $\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{i2\pi m j}{N}} \mathbf{s}(j)$ tai $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{i2\pi m j}{N}} \mathbf{s}(j)$. Valittu määritelmä vaikuttaa vain siihen missä kohdissa muissa kaavoissa luku N esiintyy.
- Koska $e^{-i2\pi j} = 1$ kun j on kokonaisluku, niin Fourier-muunnos $\hat{\mathbf{s}}$ on jaksollinen jaksolla N , eli $\hat{\mathbf{s}}(m + N) = \hat{\mathbf{s}}(m)$. On hyödyllistä olettaa, että myös luvut $\mathbf{s}(j)$, $j = 0, 1, \dots, N-1$ ovat osa jaksollista jonoa $\mathbf{s}(j)$, $j \in \mathbb{Z}$ missä $\mathbf{s}(j + N) = \mathbf{s}(j)$ kaikilla j . Silloin diskreetti Fourier-muunnos voidaan laskea myös kaavalla $\hat{\mathbf{s}}(m) = \sum_{j=j_1}^{j_2} e^{-\frac{i2\pi m j}{N}} \mathbf{s}(j)$ missä $j_2 - j_1 = N - 1$.

💡 Diskreetin Fourier-muunnoksen käänteismuunnos

\mathcal{F}_N on bijektio N -jaksollisten jonojen välillä ja

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(m) &= (\mathcal{F}_N^{-1}(\hat{\mathbf{s}}))(m) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi mj}{N}} \hat{\mathbf{s}}(j) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi mj}{N}} \hat{\mathbf{s}}(-m) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi mj}{N}} \hat{\mathbf{s}}(\text{mod}(-j, N)) \end{aligned}$$

eli $\mathcal{F}_N^{-1} = \frac{1}{N} R \mathcal{F}_N = \frac{1}{N} \mathcal{F}_N R$ missä $(R\hat{\mathbf{s}})(m) = \hat{\mathbf{s}}(-m)$.

💡 FFT

FFT on algoritmi, jolla diskreetti Fourier-muunnos lasketaan käyttäen $cN \log(N)$ laskutoimitusta eikä $c'N^2$ niin kuin suoraviivainen lasku edellyttäisi.

💡 Fourier-integraalin numeerinen laskeminen

Olkoon s reaaliakselilla \mathbb{R} määritelty funktio josta tunnetaan arvot pisteissä $t_0 + j\Delta t$, $j = 0, 1, \dots, N-1$ (missä oletetaan, että $\Delta t > 0$). Jos nyt p on sellainen \mathbb{R} :llä funktio, että $p(0) = 1$ ja $p(j) = 0$ kun $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, niin funktio

$$g(t) = \sum_{j=0}^{N-1} s(t_0 + j\Delta t) p\left(\frac{t - t_0 - j\Delta t}{\Delta t}\right),$$

toteuttaa ehdot

$$g(j\Delta t + t_0) = s(t_0 + j\Delta t), \quad j = 0, \dots, N-1,$$

ja $g(t_0 + j\Delta t) = 0$ kun $j < 0$ tai $j > N-1$.

Usein on tarkoituksenmukaista vaatia, että myös $\int_{\mathbb{R}} p(t) dt = 1$ ja joskus voi olla syytä luopua interpolointiehdosta $p(0) = 1$ ja $p(j) = 0$ kun $j \neq 0$. Perusidea on nyt, että s :n Fourier-muunnoksen sijasta lasketaan g :n Fourier-muunnos ja erityisen hyvin se onnistuu pisteissä $m\Delta\nu$, $m \in \mathbb{Z}$ missä

$$\Delta t \Delta\nu = \frac{1}{N}.$$

💡 Fourier-integraalin numeerinen laskeminen, jatk.

Jos nyt valitaan

$$\mathbf{q}(j) = s(t_0 + j\Delta t), \quad j = 0, \dots, N-1,$$

niin

$$\hat{g}(m\Delta\nu) = \Delta t e^{-i2\pi m\Delta\nu t_0} \hat{\mathbf{q}}(m) \hat{p}\left(\frac{m}{N}\right), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Funktion p valinnaksi on monta vaihtoehtoa:

- Lineaarinen interpolointi: $p(t) = \max\{0, 1 - |t|\}$ jolloin $\hat{p}(\nu) = \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\right)^2$.
- Kuutiosplini-interpolointi jolloin $\hat{p}(\nu) = \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\right)^4 \frac{1}{1 - \frac{2}{3} \sin(\pi\nu)^2}$.
- sinc-interpolointi: $p(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ jolloin $\hat{p}(\nu) = 1$ kun $|\nu| < \frac{1}{2}$ ja $\hat{p}(\nu) = 0$ kun $|\nu| > \frac{1}{2}$.

😊 Miksi?

Koska $\Delta\nu = \frac{1}{N\Delta t}$ niin

$$\begin{aligned} \hat{g}(m\Delta\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi m\Delta\nu t} g(t) dt \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{q}(j) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi m\Delta\nu t} p\left(\frac{t - t_0 - j\Delta t}{\Delta t}\right) dt \stackrel{t = t_0 + j\Delta t + \tau\Delta t}{=} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{q}(j) \Delta t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi m\Delta\nu t_0} e^{-i2\pi m\Delta\nu j\Delta t} e^{-i2\pi m\Delta\nu \Delta t \tau} p(\tau) d\tau \\ &= \Delta t e^{-i2\pi m\Delta\nu t_0} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi mj}{N}} \mathbf{q}(j) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi \frac{m}{N} \tau} p(\tau) d\tau \\ &= \Delta t e^{-i2\pi m\Delta\nu t_0} \hat{\mathbf{q}}(m) \hat{p}\left(\frac{m}{N}\right). \end{aligned}$$

😊 Jaksolliset funktiot, \mathbb{R}/\mathbb{Z} jne

- Funktio $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on jaksollinen jaksolla 1 jos $s(t+1) = s(t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$.
- \mathbb{R}/\mathbb{Z} on ekvivalenssiluokkien $\{t+n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{Z}\}$ muodostama joukko eli joukko \mathbb{R} missä pisteet t ja $t+n$ on samaistettu kun $n \in \mathbb{Z}$.
- Jokaista funktiota $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ voidaan käsitellä jaksollisena funktiona $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ja päinvastoin ja näin tässä tullaan tekemäänkin.
- Välillä $[0, 1)$ määritellystä funktiosta s saadaan jaksollinen funktio $s(\text{mod}(t, 1))$. Tästä seuraa, että joukko $L^p(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ missä joka sisältää kaikki jaksolliset (jaksolla 1) ja mitalliset funktiot s , joilla $\int_0^1 |s(t)|^p dt < \infty$ missä $1 \leq p < \infty$ on sama kuin joukko $L^p([0, 1))$, mutta huomaa, että jos $s \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ eli s on jatkuva ja jaksollinen niin s on jatkuva välillä $[0, 1]$ ja $s(0) = s(1)$.

💡💡 Jaksollisen funktion Fourier-kertoimet

Jos $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ niin

$$\hat{s}(k) = \int_0^1 e^{-i2\pi kt} s(t) dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

💡 Huom!

Jos $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ niin funktioden s ja $e^{-i2\pi kt}$ jaksollisuudesta seuraa, että Fourier-kertoimet saadaan myös kaavoilla

$$\hat{s}(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i2\pi kt} s(t) dt = \int_{-a}^{1-a} e^{-i2\pi kt} s(t) dt.$$

💡💡 Jaksolliset funktiot jaksolla T

Jos s :n jakso on T eli $s(t+T) = s(t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$ niin funktio $g(t) = s(t/T)$ on jaksollinen jaksolla 1 ja muuttujan vaihdon jälkeen todetaan, että g :n (eli yhtä hyvin s :n) Fourier-kertoimiksi tulee

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{-i2\pi kt} s(t) dt.$$

😊 Riemann-Lebesguen lemma

Jos $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ niin

$$|\hat{s}(k)| \leq \|s\|_{L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ja} \quad \lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{s}(k) = 0.$$

💡 Huom!

"Fourier-analyysi" perustuu tuloksiin, joiden mukaan $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(k) e^{i2\pi kt}$ "on" $s(t)$ mutta ongelma on mitä summalla tarkoitetaan. Tietyin oletuksin ongelmia ei ole, muissa tapauksissa sen sijaan on valittava sopiva tulkinta tai sitten todistuksista tulee hyvin hankalia.

💡 Fourier-sarjan suppeneminen, I

Jos $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ on derivoituva pisteessä t_0 tai jos pelkästään

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|t|} |s(t+t_0) - s(t_0)| dt < \infty \quad \text{niin}$$

$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} \sum_{k=-M}^N e^{i2\pi kt_0} \hat{s}(k) = s(t_0).$$

💡 Konvoluutio

Jos h ja $g \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ niin $g * h \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ missä

$$(g * h)(t) = \int_0^1 g(t-u)g(u) du = \int_0^1 f(u)g(t-u) du,$$

ja

$$\widehat{g * h}(k) = \hat{g}(k)\hat{h}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tavallisesti kirjoitetaan $g * h$ eikä $g * h$ jos on selvää minkälaisesta konvoluutiosta on kyse.

💡 Itseisesti suppenevat Fourier-sarjat

Jos $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| < \infty$ niin $A(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{i2\pi kt} \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ja $\hat{A}(k) = a_k$.
Jos lisäksi $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ niin

$$(A * s)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \hat{s}(k) e^{i2\pi kt}.$$

💡 Erikoistapaus: Fejerin ydin

$$F_N(t) = \begin{cases} \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(N\pi t)}{\sin(\pi t)} \right)^2, & t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \\ N, & t \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

missä $N = 1, 2, \dots$

- $\widehat{F}_N(k) = \max \left\{ 0, \frac{N-|k|}{N} \right\}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $F_N \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ja $F_N(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$.
- $\int_0^1 F_N(t) dt = 1$.
- Jos $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, niin $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 |(F_N * s)(t) - s(t)| dt = 0$ ja jos $s \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ niin $\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |(F_N * s)(t) - s(t)| = 0$.

💡💡 Fourier-sarjan suppeneminen II

Jos $s \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ niin

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=-N}^N \frac{N-|k|}{N} \hat{s}(k) e^{i2\pi kt} - s(t) \right| = 0.$$

ja jos $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ niin

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=-N}^N \frac{N-|k|}{N} \hat{s}(k) e^{i2\pi kt} - s(t) \right| dt = 0.$$

💡💡 Fourier-muunnos on injektio

Jos $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ja $\hat{s}(k) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ niin $s(t) = 0$ melkein kaikilla t .

💡 Fourier-sarjan suppeneminen III

Jos $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ja $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{s}(k)| < \infty$ niin $s \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ja

$$s(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(k) e^{i2\pi kt}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

💡 Sisätulo $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$:ssä

Jos g ja $h \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ niin

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 g(t) \overline{h(t)} dt.$$

😊 $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ on Hilbert-avaruus

Jos funktioiden sijasta tarkastellaan ekvivalenssiluokkia eli $g = h$ jos ja vain jos $g(t) = h(t)$ melkein kaikilla t , niin silloin $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ on Hilbert-avaruus eli täydellinen (eli jokainen Cauchy-jono suppenee) sisätuloavaruus (ja siten "samanlainen" joukko kuin taso \mathbb{R}^2 , jossa sisätulo on $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$, kun 2:n paikalle tulee ∞ ja \mathbb{R} :n paikalle \mathbb{C}).

💡💡 Funktiot $t \mapsto e^{i2\pi kt}$ muodostavat $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$:n ortonormaalin kannan

Jos määritellään $e_k(t) = e^{i2\pi kt}$ niin

$$\langle e_m, e_k \rangle = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & m \neq k, \end{cases}$$

ja jos $s \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ niin

$$\langle s, e_k \rangle = \int_0^1 s(t) \overline{e^{i2\pi kt}} dt = \int_0^1 s(t) e^{-i2\pi kt} dt = \hat{s}(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

ja

$$s = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle s, e_k \rangle e_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(k) e_k.$$

Jos g ja $h \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ niin

$$\int_0^1 g(t) \overline{h(t)} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(k) \overline{\hat{h}(k)} \quad \text{ja erityisesti} \quad \int_0^1 |s(t)|^2 dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{s}(k)|^2.$$

💡💡 Fourier-sarjan suppeneminen IV

Jos $s \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ niin jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa äärellinen joukko $I \subset \mathbb{Z}$ siten, että jos $I \subset J \subset \mathbb{Z}$ ja J on äärellinen niin

$$\int_0^1 \left| s(t) - \sum_{k \in J} \hat{s}(k) e^{i2\pi kt} \right|^2 dt < \epsilon.$$

Toisin sanoen, sarja suppenee L^2 -mielessä ja kun lasketaan yhteen sarjan termit, järjestyksellä ei ole merkitystä, eli sarja on summautuva. Mutta sen sijaan sarja ei ole välttämättä itseisesti suppeneva.