Aalto-yliopisto

MS-A0502 Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi — Gripenberg, Kiiski
Harjoitus 3
10–14.11.2014, viikko 46

Vastaa Stack-tehtäviin (`stack3.aalto.fi/course/view.php?id=30`)
viimeistään 17.11.2014 kl. 12.00.

Palauta P-tehtävät viimeistään 17.11.2014 kl. 12.
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Puhelinkeskukseen tulevien puheluiden lukumäärä oletetaan jokaisella T:n pituisella aikavälillä noudattavan $\mathrm{Poisson}(\lambda T)$-jakaumaa (ja ajat peräkkäisten puheluiden välillä ovat riippumattomia ja eksponentiaalisesti jakautuneita) siten, että yhdessä minuutissa tulee keskimäärin 100 puhelua.

(a) Mikä on odotettavissa oleva puheluiden lukumäärä 1 tunnin aikana.
(b) Mikä on keskimääräinen puheluiden tulon väliaika?
(c) Mikä on todennäköisyys, että puheluita tulee 1 tunnissa enemmän kuin 6200? Käytä normaaliapproksimaatiota.

Huom! $\mathrm{N}(0,1)$*-jakauman kertymäfunktio on Matlab/octavessa* `normcdf`.

P2. Liikkeessä on erään tavaran kahden peräkkäisen päivän myyntien X ja Y yhteisjakauma normaalinen, odotusarvot ovat $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 4000$ kpl, keskihajonnat ovat $\sigma_X = \sigma_Y = 400$ kpl ja X:n ja Y:n välinen korrelaatiokerroin on 0.75. Jos eräänä päivänä myydään 4200 kpl niin millä todennäköisyydellä myydään seuraavana päivänä korkeintaan 3800 kpl?

Vihje: Jos (X,Y) *on normaalijakautunut niin* $(Y|X=x) \sim \mathrm{N}(\mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X), (1-\rho^2)\sigma_Y^2)$.

Vastaus: ≈ 0.093

P3. Pankki on myöntänyt sadan miljoonan dollarin lainan kahdelle eri asiakkaalle A ja B ja kun pankki myy lainasaatavansa eteenpäin sijoittajille se tekee lainoista kaksi pakettia, α ja β, seuraavalla tavalla: Riskipitoisemman paketin α ostaja saa sata miljonaa dollaria jos sekä A että B maksavat lainansa takaisin ja turvallisemman paketin β ostaja saa samoin sata miljonaa dollaria jos ainakin toinen A:sta ja B:sta maksaa lainansa takaisin. Olkoon X satunnaismuuttuja joka saa arvon 0 jos A jättää lainansa maksamatta ja 1 jos A maksaa lainansa ja vastaavasti satunnaismuuttuja Y saa arvon 0 jos B jättää lainansa maksamatta ja muuten 1.

Oleta nyt, että $\Pr(X=1) = \Pr(Y=1) = 0.9$.

(a) Laske todennäköisyys, että paketin α ostaja menettää rahansa ja todennäköisyys, että paketin β ostaja menettää rahansa jos oletetaan, että X ja Y ovat riippumattomia.
(b) Laske samat todennäköisyydet kuin (a)-kohdassa jos oletetaan, että X:n ja Y:n välinen korrelaatio on 0.5.

Vihje: Molemmissa tapauksissa tarvitaan todennäköisyydet $p_{ij} = \Pr(X=i, Y=j)$ *kun* $i,j \in \{0,1\}$ *ja (b)-kohdassa* p_{11} *saadaan korrelaation määritelmän avulla kunhan* X*:n ja* Y*:n odotusarvot ja varianssit on ensin laskettu.*

Vastaus: (a) 0.19 ja 0.01, (b) 0.145 ja 0.055

P4. Olkoon $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ ja $Y = WX$ missä W diskreetti satunnaismuuttuja siten, että X ja W ovat riippumattomia ja $\Pr(W=-1) = \Pr(W=1) = \frac{1}{2}$. Määritä Y:n jakauma (laskemalla $\Pr(Y \le t)$) sekä $\mathrm{Cor}(X,Y)$. Ovatko X ja Y riippumattomia?

Vihje: Tapahtuma $\{Y \leq t\}$ *on kahden toisiaan poissulkevan tapahtuman unioni ja normaalijakauman symmetrian nojalla* $F_{\mathrm{N}(0,1)}(-t) = 1 - F_{\mathrm{N}(0,1)}(t)$. *Kun selvität ovatko* X *ja* Y *riippumattomia voit katsoa ovatko tapahtumat* $A = \{X \leq -2\}$ *ja* $B = \{|Y| \leq 1\}$ *riippumattomia*

P5. Oletamme, että tietyn tyyppinen lamppu toimii ajan, joka on eksponentiaalisesti jakautunut parametrillä λ ja että nämä ajat eri lampuilla ovat toisistaan riippumattomia. Oletamme, myös, että kun lamppu menee rikki, se korvataan heti uudella (toimivalla) lampulla. Jos nyt aikavälillä $[0, T]$ tapahtuu täsmälleen yksi tällainen lampunvaihto niin miten sen ajankohta on jakautunut välille $[0, T]$?

Vihje: Eksponentiaalijakauman ominaisuuksista seuraa, että hetkellä 0 *käytössä olevan lampun elinaika voidaan laskea tästä ajankohdasta. Miten voit kahden riippumattoman* $\mathrm{Exp}(\lambda)$ *jakautuneen satunnaismuuttujan* X_1 *ja* X_2 *avulla formuloida tapahtumat "välillä* $[0, T]$ *tapahtuu täsmälleen yksi lampunvaihto" ja "ensimmäinen lamppu vaihdetaan viimeistään hetkellä* t*"? Muista myös miten* $\Pr(X \in (a, b], Y \in (A(X), B(X)])$*-tyyppisiä todennäköisyyksiä lasketaan.*