Aalto-yliopisto

MS-A0502 Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi — Gripenberg, Kiiski
Harjoitus 3
10–14.11.2014, viikko 46

P1. Puhelinkeskukseen tulevien puheluiden lukumäärä oletetaan jokaisella T:n pituisella aikavälillä noudattavan $\mathrm{Poisson}(\lambda T)$-jakaumaa (ja ajat peräkkäisten puheluiden välillä ovat riippumattomia ja eksponentiaalisesti jakautuneita) siten, että yhdessä minuutissa tulee keskimäärin 100 puhelua.

(a) Mikä on odotettavissa oleva puheluiden lukumäärä 1 tunnin aikana.

(b) Mikä on keskimääräinen puheluiden tulon väliaika?

(c) Mikä on todennäköisyys, että puheluita tulee 1 tunnissa enemmän kuin 6200? Käytä normaaliapproksimaatiota.

Huom! $\mathrm{N}(0,1)$*-jakauman kertymäfunktio on Matlab/octavessa* `normcdf`.

Ratkaisu: (a) Puheluiden lukumäärä 1 minuutin aikana noudattaa Poisson-jakaumaa parametrilla 100 ja koska tunnissa on 60 minuuttia niin puheluiden lukumäärä 1 tunnin aikana noudattaa Poisson-jakaumaa parametrilla $60 \cdot 100$ joten odotusarvo on 6000.

(b) Jos puheluiden lukumäärä aikayksikössä on $\mathrm{Poisson}(\lambda)$ jakautunut niin aika puheluiden välillä on $\mathrm{Exp}(\lambda)$ jakautunut joten odotusarvo on $\frac{1}{\lambda}$ eli tässä tapauksessa $\frac{1}{100}$ min $= 0.6$s.

(c) Keskeisen raja-arvolauseen mukaan $A = \dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} \sim_a \mathrm{N}(0,1)$ jos X on summa "riittävän" monesta riippumattomista satunnaismuuttujista. Poisson-jakauma täyttää nämä ehdot kun parametri λ on "riittävän" iso ja tässä tapauksessa $\mathrm{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda = 6000$. Näin ollen

$$\Pr(X > 6200) = \Pr\left(\frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} > \frac{6200 - 6000}{\sqrt{6000}}\right) = \Pr\left(\frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} > 2.582\right)$$
$$= 1 - \Pr\left(\frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} \le 2.582\right) \approx 1 - F_{\mathrm{N}(0,1)}(2.582) = 1 - 0.9951 = 0.0049.$$

Approksimaatiossa syntyvä virhe on itseisarvoltaan noin 0.00008 eli tarkkuus on aivan riittävä normaaliapproksimaatiolla.

P2. Liikkeessä on erään tavaran kahden peräkkäisen päivän myyntien X ja Y yhteisjakauma normaalinen, odotusarvot ovat $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 4000$ kpl, keskihajonnat ovat $\sigma_X = \sigma_Y = 400$ kpl ja X:n ja Y:n välinen korrelaatiokerroin on 0.75. Jos eräänä päivänä myydään 4200 kpl niin millä todennäköisyydellä myydään seuraavana päivänä korkeintaan 3800 kpl?

Vihje: Jos (X, Y) *on normaalijakautunut niin* $(Y|X = x) \sim \mathrm{N}(\mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X), (1-\rho^2)\sigma_Y^2)$.

Vastaus: ≈ 0.093

Ratkaisu:

Koska (X, Y) noudattaa kaksiulotteista normaalijakaumaa niin ehdolla $X = x = 4200$

$$Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y + \rho\tfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X), (1 - \rho^2)\sigma_Y^2)$$
$$= \mathrm{N}(4000 + \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{400}{400}(4200 - 4000), (1 - \tfrac{9}{16})160000) = \mathrm{N}(4150, 70000).$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}\Pr(Y \le 3800 | X = 4200) &= \Pr\Big(\frac{Y - 4150}{\sqrt{70000}} \le \frac{3800 - 4150}{\sqrt{70000}} \;\Big|\; X = 4200\Big) \\ &= \Pr(Z \le -1.32) \approx 0.093.\end{aligned}$$

P3. Pankki on myöntänyt sadan miljoonan dollarin lainan kahdelle eri asiakkaalle A ja B ja kun pankki myy lainasaatavansa eteenpäin sijoittajille se tekee lainoista kaksi pakettia, α ja β, seuraavalla tavalla: Riskipitoisemman paketin α ostaja saa sata miljonaa dollaria jos sekä A että B maksavat lainansa takaisin ja turvallisemman paketin β ostaja saa samoin sata miljonaa dollaria jos ainakin toinen A:sta ja B:sta maksaa lainansa takaisin. Olkoon X satunnaismuuttuja joka saa arvon 0 jos A jättää lainansa maksamatta ja 1 jos A maksaa lainansa ja vastaavasti satunnaismuuttuja Y saa arvon 0 jos B jättää lainansa maksamatta ja muuten 1.

Oleta nyt, että $\Pr(X = 1) = \Pr(Y = 1) = 0.9$.

(a) Laske todennäköisyys, että paketin α ostaja menettää rahansa ja todennäköisyys, että paketin β ostaja menettää rahansa jos oletetaan, että X ja Y ovat riippumattomia.

(b) Laske samat todennäköisyydet kuin (a)-kohdassa jos oletetaan, että X:n ja Y:n välinen korrelaatio on 0.5.

Vihje: Molemmissa tapauksissa tarvitaan todennäköisyydet $p_{ij} = \Pr(X = i, Y = j)$ kun $i, j \in \{0, 1\}$ ja (b)-kohdassa p_{11} saadaan korrelaation määritelmän avulla kunhan X:n ja Y:n odotusarvot ja varianssit on ensin laskettu.

Vastaus: (a) 0.19 ja 0.01, (b) 0.145 ja 0.055

Ratkaisu: Merkitään $\Pr(X = i, Y = j) = p_{ij}$ missä $i, j \in \{0, 1\}$. Lisäksi tiedetään, että $\Pr(X = 1) = \Pr(Y = 1) = 0.9$ ja $\Pr(X = 0) = \Pr(Y = 0) = 0.1$.

(a) Kun X ja Y ovat riippumattomia niin

$$\begin{aligned} p_{00} &= 0.1 \cdot 0.1 = 0.01, \\ p_{11} &= 0.9 \cdot 0.9 = 0.81, \\ p_{10} = p_{01} &= 0.1 \cdot 0.9 = 0.09. \end{aligned}$$

Silloin paketin α ostaja menettää rahansa todennäköisyydellä

$$\Pr(X = 0 \text{ tai } Y = 0) = 1 - p_{11} = 1 - 0.81 = 0.19,$$

ja paketin β ostaja menettää rahansa todennäköisyydellä

$$\Pr(X = 0 \text{ ja } Y = 0) = p_{00} = 0.01.$$

(b) Jos X ja Y eivät ole riippumattomia niin tiedetään ainakin, että

$$\begin{aligned} p_{00} + p_{01} = p_{00} + p_{10} &= 0.1, \\ p_{01} + p_{11} = p_{10} + p_{11} &= 0.9, \\ \mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) &= 0.9, \\ \mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) &= 0.1 \cdot 0.9 = 0.09. \end{aligned}$$

Jos nyt muuttujien X ja Y välinen korrelaatio on 0.5 niin

$$0.5 = \frac{\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{p_{11} - 0.81}{0.09},$$

josta seuraa, että $p_{11} = 0.81 + 0.5 \cdot 0.09 = 0.855$, $p_{01} = p_{10} = 0.9 - 0.855 = 0.045$ ja $p_{00} = 0.1 - 0.045 = 0.055$. Näin ollen tässä tapauksessa paketin α ostaja menettää rahansa todennäköisyydellä

$$\Pr(X = 0 \text{ tai } Y = 0) = 1 - p_{11} = 0.145,$$

ja paketin β ostaja menettää rahansa todennäköisyydellä

$$\Pr(X = 0 \text{ ja } Y = 0) = p_{00} = 0.055,$$

eli turvallisen paketin kohdalla luottotappion riski kasvaa yli viisinkertaiseksi verrattuna (a)-kohdan tilanteeseen.

P4. Olkoon $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ ja $Y = WX$ missä W diskreetti satunnaismuuttuja siten, että X ja W ovat riippumattomia ja $\Pr(W = -1) = \Pr(W = 1) = \frac{1}{2}$. Määritä Y:n jakauma (laskemalla $\Pr(Y \leq t)$) sekä $\mathrm{Cor}(X, Y)$. Ovatko X ja Y riippumattomia?

Vihje: Tapahtuma $\{Y \leq t\}$ on kahden toisiaan poissulkevan tapahtuman unioni ja normaalijakauman symmetrian nojalla $F_{\mathrm{N}(0,1)}(-t) = 1 - F_{\mathrm{N}(0,1)}(t)$. Kun selvität ovatko X ja Y riippumattomia voit katsoa ovatko tapahtumat $A = \{X \leq -2\}$ ja $B = \{|Y| \leq 1\}$ riippumattomia

Ratkaisu: Koska X ja W ovat riippumattoimia ja koska $\mathrm{N}(0,1)$-jakautuneen satunnaismuutujan kertymäfunktiolle $F_{\mathrm{N}(0,1)}$ pätee (symmetrian nojalla) $1 - F_{\mathrm{N}(0,1)}(-t) = F_{\mathrm{N}(0,1)}(t)$ saadaan

$$\begin{aligned}
\Pr(Y \leq t) &= \Pr(WX \leq t) = \Pr(-X \leq t, W = -1) + \Pr(X \leq t, W = 1) \\
&= \Pr(-X \leq t)\Pr(W = -1) + \Pr(X \leq t)\Pr(W = 1) = \Pr(X > -1)\frac{1}{2} + \Pr(X \leq t)\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(1 - F_{\mathrm{N}(0,1)}(-t) + F_{\mathrm{N}(0,1)}(t)) = \frac{1}{2}(F_{\mathrm{N}(0,1)}(t) + F_{\mathrm{N}(0,1)}(t)) = F_{\mathrm{N}(0,1)}(t),
\end{aligned}$$

joten $Y \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Koska W ja X ovat riippumattomia $\mathrm{E}(g(W)h(X)) = \mathrm{E}(g(W))\mathrm{E}(h(X))$ kaikilla funktioilla g ja h joten erityisesti

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(WX^2) = \mathrm{E}(W)\mathrm{E}(X^2) = 0 \cdot 1 = 0.$$

Tästä seuraa, että $\mathrm{Cor}(X, Y) = 0$.

Satunnaismuuttujat X ja Y eivät ole riippumattomia koska esim. $0 = \Pr(X \leq -2, |Y| \leq 1) \neq \Pr(X \leq -2)\Pr(|Y| \leq 1) = F_{\mathrm{N}(0,1)}(-2)(F_{\mathrm{N}(0,1)}(1) - F_{\mathrm{N}(0,1)}(-1)) > 0$, eikä satunnaismuuttuja (X, Y) ole normaalijakautunut koska jos olisi, niin 0-korrelaatiosta seuraisi riippumattomuus.

P5. Oletamme, että tietyn tyyppinen lamppu toimii ajan, joka on eksponentiaalisesti jakautunut parametrillä λ ja että nämä ajat eri lampuilla ovat toisistaan riippumattomia. Oletamme, myös, että kun lamppu menee rikki, se korvataan heti uudella (toimivalla) lampulla. Jos nyt aikavälillä $[0, T]$ tapahtuu täsmälleen yksi tällainen lampunvaihto niin miten sen ajankohta on jakautunut välille $[0, T]$?

Vihje: Eksponentiaalijakauman ominaisuuksista seuraa, että hetkellä 0 *käytössä olevan lampun elinaika voidaan laskea tästä ajankohdasta. Miten voit kahden riippumattoman* $\mathrm{Exp}(\lambda)$ *jakautuneen satunnaismuuttujan* X_1 *ja* X_2 *avulla formuloida tapahtumat "välillä* $[0, T]$ *tapahtuu täsmälleen yksi lampunvaihto" ja "ensimmäinen lamppu vaihdetaan viimeistään hetkellä* t*"? Muista myös miten* $\Pr(X \in (a, b], Y \in (A(X), B(X)])$*-tyyppisiä todennäköisyyksiä lasketaan.*

Ratkaisu: Olkoot X_1 ja X_2 riippumattomia $\mathrm{Exp}(\lambda)$ jakautuneita satunnaismuuttujia jotka siis ovat ensimmäisen ja toisen lampun elinajat. Silloin tapahtuma "välillä $[0, T]$ tapahtuu täsmälleen yksi lampunvaihto" on $\{X_1 \le T, X_1 + X_2 > T\}$ ja tapahtuma "ensimmäinen lamppu vaihdetaan viimeistään hetkellä t" on $\{X_1 \le t\}$. Meidän pitää siis laskea

$$\Pr(X_1 \le t | X_1 \le T, X_1 + X_2 > T), \quad 0 \le t \le T.$$

Tapahtuma $(X_1 \le t, X_1 \le T, X_1 + X_2 > T)$ on sama kuin tapahtuma $(X_1 \le t, X_1 + X_2 > T)$ kun $t \le T$. Koska $\Pr(X_2 > T - u) = \mathrm{e}^{-\lambda(T-u)}$ niin

$$\begin{aligned}\Pr(X_1 \le t,\ X_1 + X_2 > T) = \Pr(X_1 \le t,\ X_2 > T - X_1) &= \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u} \mathrm{e}^{-\lambda(T-u)}\, \mathrm{d}u \\ &= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda T} \int_0^t \mathrm{d}u = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda T} t.\end{aligned}$$

Sijoittamalla tähän $t = T$ saamme myös $\Pr(X_1 \le T, X_1 + X_2 > T) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda T} T$ jolloin

$$\begin{aligned}\Pr(X_1 \le t | X_1 \le T, X_1 + X_2 > T) &= \frac{\Pr(X_1 \le t, X_1 \le T, X_1 + X_2 > T)}{\Pr(X_1 \le T, X_1 + X_2 > T)} \\ &= \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda T} t}{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda T} T} = \frac{t}{T}.\end{aligned}$$

Eli olettaen, että tapahtuu täsmälleen yksi lampunvaihto, tämän vaihdon ajankohta on tasaisesti jakautunut välillä $[0, T]$.
