

Returnera lösningarna till I-uppgifterna senast 15.9.2014 kl. 10.30

Kom ihåg att skriva ditt namn och studentnummer!

I1.

- (a) Ge ett exempel på mängder A , B och C så att $A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C$.
(b) Ge ett exempel på mängder $A_j \subset \mathbb{R}$, $j \geq 1$ så att $\bigcap_{j=1}^n A_j \neq \emptyset$ för alla $n \geq 1$ men $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$.

Obs! Här är $\bigcap_{j=1}^n A_j = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x : x \in A_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ och $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \cap A_2 \cap \dots = \{x : x \in A_j, j \geq 1\}$.

I2. Visa med hjälp av induktionsprincipen att

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 27 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \sum_{j=1}^n j 3^{j-1} = \frac{1}{4}(3^n(2n-1) + 1), \quad n \geq 1.$$

I3. Uttryck följande satser på svenska och avgör vilka som är sanna och vilka falska (utan desto mera motiveringar).

- (a) $\forall x((x \in \mathbb{R}) \rightarrow \exists y(y \in \mathbb{R} \ \&\& \ x = y^2))$
(b) $\forall y \in \mathbb{Z}(\exists x \in \mathbb{Z}(2y = x))$
(c) $(x \in \mathbb{R}) \rightarrow (x < 0 \rightarrow \exists y \in \mathbb{R}(y < 0 \ \&\& \ y > x))$.

Ledning: Här är \mathbb{Z} mängden heltal och \mathbb{R} mängden av reella tal.

I4.

- (a) Ge ett exempel, om det är möjligt, på ett predikat $P(x, y)$ (dvs. ett påstående som innehåller x och y) så att satsen $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$ är falsk.
(b) Ge ett exempel, om det är möjligt, på ett predikat $Q(x, y)$ (dvs. ett påstående som innehåller x och y) så att satsen $\exists y \forall x Q(x, y) \rightarrow \forall x \exists y Q(x, y)$ är falsk.

I5.

- (a) Bevisa att om a , b och c är positiva reella tal så att $a \cdot b = c$ så gäller $a \leq \sqrt{c}$ eller $b \leq \sqrt{c}$.
(b) Bevisa att det finns positiva irrationella tal a och b så att a^b är ett rationellt tal genom att

använda det faktum att $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal och $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$.

(Observera att det enda du behöver veta om rationella och irrationella tal i denna uppgift är att ett reellt tal är antingen rationellt eller irrationellt, 2 är rationellt och $\sqrt{2}$ irrationellt.)

Besvara Stack-uppgifterna (stack3.aalto.fi/course/view.php?id=15)
senast 15.9.2014 kl. 10.30
