Aalto-yliopisto

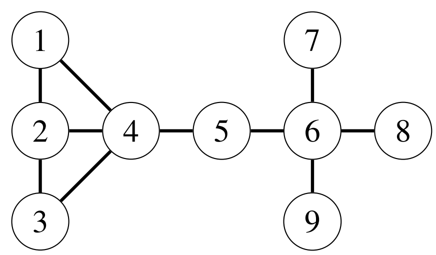
MS-A0402 Diskreetin matematiikan perusteet — Gripenberg, Karvonen
Harjoitus 5
23–27.3.2015, viikko 13

Palauta P-tehtävät (ja vastaa S-tehtäviin) viimeistään 30.3.2015 klo. 16.
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Funktio $\alpha : \{0,1,\ldots,12\} \to \{0,1,2\ldots,12\}$ joka on määritelty kaavalla $\alpha(x) = \operatorname{mod}(3\cdot x, 13)$ on bijektio (koska $\operatorname{syt}(3,13) = 1$). Kirjoita α syklien tulona ja määritä α:n radat eli joukot $\{\, \alpha^j(x) : j \geq 0 \,\}$ kun $x \in \{0,1,\ldots,12\}$ ja $\alpha^j = \underbrace{\alpha \circ \alpha \circ \ldots \circ \alpha}_{j}$.

Vihje: Esimerkiksi sykli $\beta = (1\ 2\ 4)$ on bijektio joka toteuttaa ehdot $\beta(1) = 2$, $\beta(2) = 4$ ja $\beta(4) = 1$ ja $\beta(x) = x$ kaikilla muilla x ja sen radat ovat $\{1,2,4\}$ ja joukot $\{x\}$ kaikilla $x \in \{0,1,\ldots,12\} \setminus \{1,2,3\}$.

P2. Määritä ryhmä G, joka muodostuu kaikista alla olevan verkon



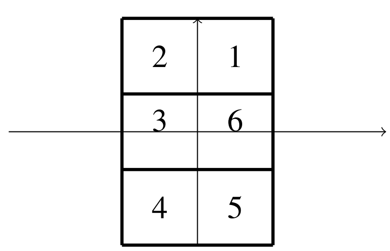
solmujen permutaatioista f siten, että jos solmujen a ja b välillä on kaari (eli a ja b ovat naapureita), niin myös solmujen $f(a)$ ja $f(b)$ on kaari, (eli nekin ovat naapureita).

Määritä myös ryhmän sykli-indeksi $\zeta_{G,X} = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}\zeta_{f,X}$ missä $\zeta_{f,X}(t_1,\ldots,t_n) = t_1^{j_1}\cdot t_2^{j_2}\cdot\ldots\cdot t_n^{j_n}$ kun j_k on permutaation f k-pituisten ratojen lukumäärä.

Vihje: Jos f on tällainen permutaatio niin $f(a)$:lla on yhtä monta naapuria kuin a:lla joten päättele ensin mitä voit sanoa solmusta $f(a)$ kun $a = 2$, 4, 6 ja 5.

Vastaus: $\zeta_{G,X}(t_1,t_2,t_3) = \frac{1}{12}\left(t_1^9 + 4t_1^7t_2 + 3t_1^5t_2^2 + 2t_1^6t_3 + 2t_1^4t_2t_3\right)$

P3. Olkoon X lauta jossa on 2×3 neliötä, joiden sivut ovat koordinaattiakselien suuntaisia ja laudan keskipiste on origossa.



Symmetriakuvaukset ovat rotaatiot origon ympäri kulmien 0 tai π verran ja peilaukset x- ja y-akselien suhteen. Jos neliöt numeroidaan $1,2,3,4,5,6$ positiiviseen suuntaan niin nämä kuvaukset ovat permutaatiot (1), $(1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$, $(1\ 5)(2\ 4)$ ja $(1\ 2)(3\ 6)(4\ 5)$. Nämä permutaatiot muodostavat ryhmän G (mutta tätä ei tarvitse tarkistaa). Määritä sykli-indeksi $\zeta_{G,X}$ ja sen avulla monellako tavalla laudan neliöitä voidaan "värittää" 4:llä "värillä".

Vihje: Mitä Pólyan lause sanoo tällaisessa tapauksessa?

Vastaus: 1120

P4. Montako erilaista helminauhaa voidaan valmistaa käyttämällä 4 valkoista ja 4 mustaa helmeä. Tässä kaksi helminauhaa pidetään samoina jos toinen saadaan toisesta rotaatiolla ja/tai peilauksella, toisin sanoen, symmetriaryhmä on diedriryhmä. Muista, että diedriryhmän D_n, joka muodostuu säännöllisen n-kulmaisen monikulmion rotaatioista ja peilauksista, sykli-indeksi on

$$\zeta_{D_n,\mathbb{N}_n}(t_1,t_2,\ldots,t_n)=\frac{1}{2n}\sum_{d\,|\,n}\varphi(d)t_d^{\frac{n}{d}}+\begin{cases}\frac{1}{4}\left(t_2^{\frac{n}{2}}+t_1^2t_2^{\frac{n}{2}-1}\right), & \text{jos } n \text{ on parillinen,}\\ \frac{1}{2}t_1t_2^{\frac{n-1}{2}}, & \text{jos } n \text{ on pariton,}\end{cases}$$

missä $\varphi(d)$ on Eulerin funktio eli $\varphi(d)=|\{\, j\in\mathbb{Z} : 0\le j\le d-1,\ \text{syt}\,(j,d)=1\,\}|$.

Vastaus: 8

P5. Olkoon A_4 (alternoiva ryhmä) niiden joukon $\{1,2,3,4\}$ permutaatioden muodostama ryhmä, joiden merkki on $+1$. Joukkoon A_4 kuuluu silloin 8 permutaatiota a, joille pätee $a^3=e$ eli permutaatiot $(1\,2\,3)$, $(1\,3\,2)$, $(1\,3\,4)$ jne., permutaatiot $(1\,2)(3\,4)$, $(1\,3)(2\,4)$, $(1\,4)(2\,3)$ ja neutraalialkio (eli identiteettifunktio) $e=(1)$ jolloin siis $|A_4|=12$.
Oleta, että H on A_4:n aliryhmä siten, että $|H|=6$.
Osoita, että tämä johtaa ristiriitaan seuraavalla tavalla:

(a) Osoita, että jos $a\in A_4$ niin ainakin kaksi sivuluokista H, aH ja a^2H ovat samat.
(b) Olkoon $a\in A_4$ sellainen, että $a^3=e$. Osoita (a)-kohdan avulla, että $a\in H$.
(c) Osoita, että $|H|\ge 8$ eikä $|H|=6$.

Vihje: Jos H on ryhmän G aliryhmä, ja $x,\,y\in G$ niin $|xH|=|yH|$ ja joko $xH\cap yH=\emptyset$ tai $xH=yH$ ja jälkimmäiseesä tapauksessa $x^{-1}y\in H$. Huomaa myös, että jos $a^3=e$ niin $a^2=a^{-1}$ ja jos x kuuluu johonkin aliryhmään myös x^{-1} kuuluu kyseiseen aliryhmään.

Huom! *Sivuluokkien ominaisuuksista seuraa, että jos H on G:n aliryhmä niin $|H|$ jakaa $|G|$:n ja tämä esimerkki osoittaa, että jos m jakaa $|G|$:n niin ei välttämättä löydy G:n aliryhmää H siten, että $|H|=m$*