

Palauta P-tehtävät (ja vastaa S-tehtäviin) viimeistään 16.3.2015 klo. 16.

**Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!**

**P1.** Oletetaan, että  $(x_j, y_j)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5$  ovat viisi pistettä tasossa siten, että kaikki koordinaatit  $x_j, y_j \in \mathbb{Z}$ . Miksi on mahdollista valita kaksi pistettä niin, että niitä yhdistävän janan keskipisteen molemmat koordinaatit ovat kokonaislukuja?

*Vihje: Milloin kahden kokonaisluvun keskiarvo on kokonaisluku?*

**P2.** Joukossa  $X$  on  $n$  alkioita. Relaatio  $W$  joukossa  $X$  on irrefleksiivinen jos  $[x, x] \notin W$  kaikilla  $x \in X$  (mikä ei siis ole sama asia kuin että se ei ole refleksiivinen). Montako irrefleksiivistä relaatiota  $W$  on olemassa joukossa  $X$ ?

*Vihje: Minkä joukon kaikki osajoukot ovat irrefleksiivisiä relaatiota joukossa  $X$  ja montako osajoukkoa tässä joukossa on?*

**P3.** Kaksi henkilöä pelaavat ristinollaa paperilla, jossa on  $20 \times 20$  ruutua eli kumpikin pelaaja piirtää vuoronperään oman merkkinsä,  $\mathbf{x}$  tai  $\mathbf{o}$ , johonkin tyhjään ruutuun. Montako erilaista tilannetta voi syntyä kun pelaajat ovat piirtäneet 87  $\mathbf{x}$ :ää, 86  $\mathbf{o}$ :ta ja muut ruudut ovat tyhjiä.

- Esitä vastauksesi multinomikertoimena.
- Laske vastauksesi käyttäen tuloperiaatetta jolloin ensimmäisessä vaiheessa valitset ne 87 ruutua joihin tulee  $\mathbf{x}$  ja sitten jäljellä vapaana olevista ne joihin tulee  $\mathbf{o}$  ja esitä vastauksesi binomikertoimien avulla.
- Osoita, että (a) ja (b) kohtien vastaukset ovat samat, laskematta niitä auki.

**P4.** Olkoon  $S(n, k)$  vaihtoehtojen lukumäärä kun joukko  $X$ , jolle pätee  $|X| = n$  jaetaan  $k$ :hon osajoukkoon  $Y_j \neq \emptyset$ ,  $j = 1, \dots, k$  siten, että  $Y_i \cap Y_j = \emptyset$  kun  $i \neq j$  ja  $\cup_{j=1}^k Y_j = X$  eikä osajoukkojen järjestyksellä ole merkitystä.

- Perustele miksi  $S(n, k) = 0$  kun  $k > n \geq 1$ .
- Perustele, miksi  $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$  kun  $n > 1$ .
- Määritä  $S(n, n-1)$ , kun  $n > 1$ .
- Esitä  $S(n, k)$  lukujen  $S(n-1, k)$  ja  $S(n-1, k-1)$  avulla kun  $n > 1$  ja  $k > 1$ .

*Vihje: (d)-kohdassa voit valita jonkin alkion  $x_0$  joukosta ja tarkastella erikseen tilanteet missä  $x_0$  jaon jälkeen kuuluu osajoukkoon, jossa on muita alkioita ja tilanteet missä  $x_0$  jaon jälkeen kuuluu osajoukkoon, jonka ainoa alkio on  $x_0$ .*

**P5.**

- Monellako tavalla voidaan järjestää luvut 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ja 10 jos vaaditaan, ettei kahden parillisen luvun välissä ole yhtään paritonta lukua?
- Monellako tavalla voidaan järjestää luvut 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9 jos vaaditaan, että kahden parillisen luvun välissä on ainakin yksi pariton luku?

*Vihje: Voit ensin käsitellä parilliset ja parittomat luvut esim. ”valkoisina ja mustina palloina” ja ottaa huomioon annetut vaatimukset ja sitten toisessa vaiheessa ottaa huomioon monellako tavalla voit järjestää parilliset luvut ja monellako tavalla parittomat luvut.*