Aalto-yliopisto

MS-A0402 Diskreetin matematiikan perusteet — Gripenberg, Ketola
Harjoitus 1
24-28.21.2014, viikko 9

Palauta P-tehtävät viimeistään 3.3.2014 kl. 16
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1.

(a) Päteekö $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ kaikilla joukoilla A, B ja C, eli onko joukkoerotus-operaatio $\setminus$ assosiatiivinen?

(b) Jos a, b ja c ovat lukuja niin tunnetusti $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ mutta yleisesti ei päde $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ eli $a \circ (b \diamond c) = (a \circ b) \diamond (a \circ c)$ kun $\circ = \cdot$ ja $\diamond = +$ mutta ei jos $\circ = +$ ja $\diamond = \cdot$. Mikä on vastaava tulos jos a, b ja c ovat joukkoja ja operaatiot ovat $\cup$ ja $\cap$? Perustele esim. kuvilla!

P2. Kirjoita seuraavat lauseet suomeksi ja päättele mitkä niistä ovat tosia ja mitkä epätosia.

(a) $\forall x((x \in \mathbb{Z}) \to (x - 1 \in \mathbb{Z}))$
(b) $\forall y \in \mathbb{Z}(\exists x \in \mathbb{Z}(y = x^2))$
(c) $(x \in \mathbb{R}) \to (x > 0 \to \exists y \in \mathbb{R}(y > 0 \;\&\; y < x))$.

Vihje: Tässä $\mathbb{Z}$ on kokonaislukujen joukko ja $\mathbb{R}$ on reaalilukujen joukko.

P3. Osoita induktiolla, että

$$\sum_{j=1}^{n} (2j - 1)(2j + 1) = \frac{n}{3}(4n^2 + 6n - 1), \quad n \geq 1.$$

Vihje: Kun osoitat, että induktioaskeleen väite pätee, kirjoita se ensin muotoon $\ldots = 0$.

P4. Oletetaan, että m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja. Millä m ja n koskevalla (helposti tarkastettavalla) ehdolla on helppo todistaa, että $\log_m(n)$ ei voi olla rationaaliluku?

Vihje: Milloin saadaan helposti aikaan ristiriita jos oletetaan, että $\log_m(n)$ *on rationaaliluku?*

P5. Logiikan sääntöjen mukaan implikaatiosta $a \to b$ saadaan implikaatio $!b \to !a$.

(a) Osoita, että vastaava päättelysääntö pätee ehdollisille todennäköisyyksille seuraavassa muodossa: Jos $\Pr(A) > 0$ ja $\Pr(B) < 1$ niin oletuksesta $\Pr(B|A) = 1$ seuraa $\Pr(A^c|B^c) = 1$. Tässä siis $\Pr(A)$ on tapahtuman A todennäköisyys ja $\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}$ on tapahtuman B todennäköisyys ehdolla A ja $A^c = \Omega \setminus A$ on tapahtuman A komplementti.

(b) Päteekö edellinen tulos myös siinä muodossa, että oletuksesta $\Pr(B|A) \approx 1$ seuraa $\Pr(A^c|B^c) \approx 1$?

Vihje: Koska $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ *ja* $(A \cap B) \cap (A \setminus B) = \emptyset$ *niin* $\Pr(A) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A \setminus B)$.

Vastaa Stack-tehtäviin (`stack3.aalto.fi/course/view.php?id=17`)
viimeistään 3.3.2014 kl. 16.00

Joukko-opin perusmerkintöjä:

- Tyhjä joukko: $\emptyset = \{\}$ on tyhjä joukko johon ei kuulu yhtään alkiota, eli $x \in \emptyset$ on aina epätosi.
- Yhdiste tai unioni: $x \in A \cup B$ jos ja vain jos $x \in A$ **tai** $x \in B$.
- Leikkaus: $x \in A \cap B$ jos ja vain jos $x \in A$ **ja** $x \in B$.
- Joukkoerotus: $x \in A \setminus B$ jos ja vain jos $x \in A$ **mutta** $x \notin B$.
- Osajoukko: $A \subset B$ jos jokainen A:n alkio on myös B:n alkio.
- Yhtäläisyys: $A = B$ jos $A \subset B$ ja $B \subset A$.
- Komplementti: $A^c = \Omega \setminus A$ jos $A \subset \Omega$ ja on selvää mikä Ω on.
- Yhdiste tai unioni: $x \in \cup_{j \in J} A_j$ jos ja vain jos $x \in A_j$ jollakin $j \in J$.
- Leikkaus: $x \in \cap_{j \in J} A_j$ jos ja vain jos $x \in A_j$ kaikilla $j \in J$.

Logiikan perusmerkintöjä:

- Lause $a \,\&\, b$ on tosi kun a on tosi ja b on tosi
- Lause $a \mid b$ on tosi kun a on tosi tai b on tosi (ja myös kun molemmat ovat tosia). och b är sanna).
- Lause $!a$ on tosi kun a ei ole tosi eli a on epätosi.
- Lause $a \to b$ on tosi kun $(!a) \mid b$ on tosi, eli kun b on tosi tai a on epätosi.
- Lause $a \leftrightarrow b$ on tosi kun $(a \to b) \,\&\, (b \to a)$ on tosi.
- Lause $\forall x\, P(x)$ on tosi kun $P(x)$ on tosi kaikilla x.
- Lause $\exists x\, P(x)$ on tosi kun on olemassa x siten, että $P(x)$ on tosi.
- Lause $\forall x \in A\, (P(x))$ on sama kuin $\forall x\, (x \in A \to P(x))$ ja $\exists x \in A\, (P(x))$ on sama kuin $\exists x\, (x \in A \,\&\, P(x))$.

Induktioperiaate:
Jos $P(n)$ on väite (joka kaikilla $n \geq n_0$ on joko tosi tai epätosi) siten, että

- $P(n_0)$ on tosi
- $P(k+1)$ on tosi jos $P(k)$ on tosi (eli $P(k) \to P(k+1)$ on tosi) kun $k \geq n_0$

niin $P(n)$ on tosi kaikilla $n \geq n_0$.