Aalto-yliopisto

MS-A0401 Diskreetin matematiikan perusteet GG, EH, TH, PK, JT, LT, VÄ
Harjoitus 6
17–21.10.2016, viikko 42

Palauta P-tehtävät ja vastaa S-tehtäviin viimeistään 24.10.2016 klo. 16.
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Piirrä kaikki suuntaamattomat ei-isomorfiset puut, joissa on 5 solmua.
Vihje: Puu on (verkkoteoriassa) määritelmän mukaan verkko, joka on yksinkertainen ja sellainen, että jokaisesta solmusta on täsmälleen yksi yksinkertainen polku jokaiseen toiseen solmuun.

P2. Joukko opiskelijoita aikoo osallistua kurssien $K_1, \ldots, K_6$ kokeisiin seuraavasti:

Opisk. A	K_1	K_2
Opisk. B	K_1	K_3
Opisk. C	K_1	K_4
Opisk. D	K_1	K_5
Opisk. E	K_1	K_6
Opisk. F	K_2	K_3
Opisk. G	K_3	K_4
Opisk. H	K_4	K_5
Opisk. I	K_5	K_6
Opisk. J	K_6	K_2

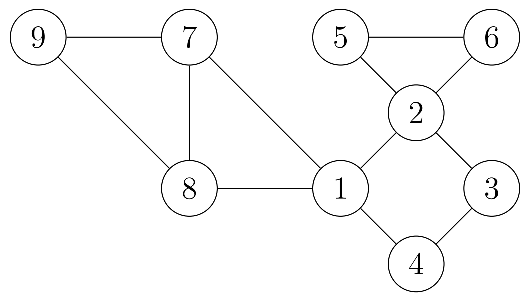
Piirrä verkko, jonka solmut ovat K_j, $j = 1, 2, \ldots 6$ siten, että solmujen K_i ja K_j välillä on kaari jos ja vain jos ainakin yksi opiskelija aikoo osallistua sekä kurssin K_i että kurssin K_j kokeeseen. Määritä verkon kromaattinen luku, eli pienin lukumäärä värejä, joilla verkon solmuja voidaan värittää niin että solmut, joiden välillä on kaari tulevat väritetyiksi eri väreillä. Mitä tämä luku kertoo tässä tapauksessa? Muuttuuko tilanne jos yksi opiskelija sairastuu eikä voi osallistua mihinkään kokeeseen (jolloin symmetrian nojalla riittää tarkastella kahta verkkoa)?

Perustele lyhyesti kaikissa tapauksissa miksi vastauksesi todella on pienin mahdollinen värien lukumäärä.

P3. Muodosta allaolevan verkon virittävä puu seuraavalla ("Depth-first search") algoritmilla mutta valitse ensimmäiseksi solmuksi v_1 solmu 1 (vaikka algoritmin mukaan se valitaan mielivaltaisesti):

- Valitse mielivaltainen solmu v_1, ja muodosta solmujen lista $S = [v_1]$ ja tyhjä kaarien joukko $K = \{\}$;
- Jos $S = [v_1, v_2, \ldots, v_j]$ missä $j < |V|$ niin lisää listan loppuun jokin solmu v_{j+1} siten että $v_{j+1} \notin \{v_1, \ldots, v_j\}$ ja solmujen v_i ja v_{j+1} välillä on kaari missä $1 \le i \le j$ ja i on mahdollisimman iso sekä lisää kaari $\{v_i, v_{j+1}\}$ kaarien joukkoon K.

Anna vastauksena listasi S ja piirrä verkko $[V, K]$.



P4.

(a) Selitä lyhyesti miksi pätee, että jos $[V_1, E_1]$ ja $[V_2, E_2]$ ovat kaksi suuntaamatonta isomorfista verkkoa niin jokaisella $k \in \mathbb{N}_0$ on molemmissa verkoissa yhtä monta solmua, joilla on k naapuria.

(b) Onko olemassa yksinkertainen suuntaamaton verkko $[V, E]$ missä $|V| = 5$ siten, että $[1, 2, 3, 4, 4] = [n(1), n(2), n(3), n(4), n(5)]$ missä $n(j)$ on solmun j naapureiden lukumäärä? Piirrä verkko tai perustele miksi se ei ole mahdollista.

P5. Olkoon $[V, E]$ suunnattu verkko, jossa ei ole yhtään sykliä ja $0 < |V| < \infty$ (jolloin se on myös yksinkertainen, eli $[a, a] \notin E$ kaikilla $a \in V$). Osoita, epäsuoralla päätelyllä, että on olemassa solmu $a \in V$ siten, että $[b, a] \notin E$ kaikilla $b \in V$.

Huom! *Tämän tuloksen avulla voidaan osoittaa (mutta se ei kuulu tähän tehtävään), että suunnatussa verkossa ei ole syklejä jos ja vain jos solmut voidaan indeksoida siten, että jos $[v_j, v_k] \in E$ niin $j < k$.*