MS-A0207 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (Chem)
Yhteenveto, osa II

G. Gripenberg

Aalto-yliopisto

9. helmikuuta 2016

Implisiittifunktiolause: $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$

Jos

- $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *on jatkuvasti derivoituva,*
- $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$,
- $\mathbf{f_y}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ *on kääntyvä matriisi,*

niin on olemassa jatkuvasti derivoituva funktio $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ *siten, että* $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ *ja* $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ *kun* $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|$ *on riittävän pieni.*
Derivoimalla saamme $\mathbf{f_x}(\mathbf{x},\mathbf{g}(\mathbf{x})) + \mathbf{f_y}(\mathbf{x},\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ *ja kun sijoitamme* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ *ja ratkaisemme* $\mathbf{g}'(\mathbf{x}_0)$ *yhtälöstä saamme*

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}_0) = -\mathbf{f_y}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)^{-1}\mathbf{f_x}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0).$$

Tässä $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *eli jotta* $\mathbf{f_y}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ *voisi olla kääntyvä, sen täytyy olla neliömatriisi, eli meillä pitää olla yhtä monta yhtälöä systeemissä* $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ *kuin mitä meillä on tuntemattomia vektorissa* $\mathbf{y}$.

Implisiittifunktiolause ja approksimaatiot

Jos $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) = 0$, $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *on jatkuvasti derivoituva ja* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0+\Delta\mathbf{x},\mathbf{y}_0+\Delta\mathbf{y}) = 0$ *niin pätee*

$$\mathbf{f_x}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{f_y}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\Delta\mathbf{y} \approx 0$$

ja jos $\mathbf{f_x}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ *on kääntyvä matriisi niin*

$$\Delta\mathbf{x} \approx -\mathbf{f_x}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)^{-1}\mathbf{f_y}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\Delta\mathbf{y}.$$

$\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_y = ?$

Jos $f(x,y,z,w) = 0$ *ja* $g(x,y,z,w) = 0$ *niin voimme (ehkä? esimerkiksi?) ratkaista joko* w *ja* z *muuttujien* x *ja* y *funktioina (eli* $w = w(x,y)$, $z = z(x,y)$*) tai* w *ja* y *muuttujien* x *ja* z *funktioina (eli* $w = w(x,z)$, $y = y(x,z)$*) ja silloin ei ole selvää mitä* $\frac{\partial w}{\partial x}$ *tarkoittaa. Tällaisessa tapauksessa merkintä* $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ *tarkoittaa, että* w *on muuttujien* x *ja* y *funktio, eli* $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_y = \dfrac{\partial w(x,y)}{\partial x}$.

Suljetut, avoimet ja rajoitetut joukot

- *Joukko* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *on suljettu jos sen reuna* $\partial\Omega \subseteq \Omega$ *ja se on avoin jos* $\partial\Omega \cap \Omega = \emptyset$ *eli jos* $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ *on suljettu.*
- *Joukon* Ω *reuna* $\partial\Omega$ *sisältää täsmälleen kaikki* $\mathbb{R}^d$*:n pisteet* $\mathbf{x}$*, joille pätee että jokaisella* $\delta > 0$ *on olemassa* $\mathbf{v}_\delta \in \Omega$ *ja* $\mathbf{u}_\delta \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ *siten, että* $\|\mathbf{v}_\delta - \mathbf{x}\| < \delta$ *ja* $\|\mathbf{u}_\delta - \mathbf{x}\| < \delta$*. (Huomaa, että on aina mahdollista valita* $\mathbf{x}$ *toiseksi näistä pisteistä* $\mathbf{v}_\delta$ *ja* $\mathbf{u}_\delta$ *ja että* $\partial\Omega = \partial(\mathbb{R}^d \setminus \Omega)$ *.)*
- *Joukko* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *on rajoitettu jos on olemassa luku* $C < \infty$ *siten, että* $\|\mathbf{x}\| \leq C$ *kun* $\mathbf{x} \in \Omega$*.*

Suurin ja pienin arvo

Jos $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *on jatkuva ja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *on suljettu ja rajoitettu niin on olemassa* $\mathbf{x}_1$ *ja* $\mathbf{x}_2 \in \Omega$ *siten, että* $f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_2)$ *kaikilla* $\mathbf{x} \in \Omega$*, eli funktio* f *saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa joukossa* Ω*. Jos* Ω *ei ole suljettu tai ei ole rajoitettu niin näin ei välttämättä ole asian laita.*
Jos $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *on jatkuva ja* $\lim_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} f(\mathbf{x}) = \infty$ *niin pienin arvo saavutetaan, eli on olemassa* $\mathbf{x}_1$ *siten, että* $f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x})$ *kaikilla* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$*.*

Optimoinnin peruslause

Jos f *on dervoituva pisteessä* $\mathbf{x}_0$ *ja* $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ *kun* $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ *missä* $\delta > 0$*, eli* $\mathbf{x}_0$ *on paikallinen minimipiste, niin pätee*

$$Df(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) = f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Milloin derivaatan nollakohta on maksimi- tai minimipiste?

Olkoon f *kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva,* $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ *ja*

$$f''(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & f_{x_1x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & f_{x_nx_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}.$$

- *Jos kaikki* $f''(\mathbf{x}_0)$*:n ominaisarvot ovat* > 0 *niin* $\mathbf{x}_0$ *on paikallinen minimipiste.*
- *Jos kaikki* $f''(\mathbf{x}_0)$*:n ominaisarvot ovat* < 0 *niin* $\mathbf{x}_0$ *on paikallinen maksimipiste.*
- *Jos* $f''(\mathbf{x}_0)$*:lla on ainakin yksi positiivinen ja ainakin yksi negatiivinen ominaisarvo niin* $\mathbf{x}_0$ *ei ole maksimi- eikä minimipiste vaan ns. satulapiste.*

Symmetrisen ja reaalisen 2 × 2-matriisin ominaisarvot?

Olkoon A *symmetrinen ja reaalinen* 2×2 *matriisi.*

$$\begin{aligned} A\text{:n ominaisarvot ovat } > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad A(1,1) > 0 \text{ ja } \det(A) > 0. \\ A\text{:n ominaisarvot ovat } < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad A(1,1) < 0 \text{ ja } \det(A) > 0. \\ A\text{:n ominaisarvoilla on eri merkki} \quad &\Leftrightarrow \quad \det(A) < 0. \end{aligned}$$

Mistä löytyy funktion suurin (tai pienin) arvo?

Jos $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *on jatkuva ja* Ω *on suljettu (*Ω*:n reuna on* $\partial\Omega \subset \Omega$*) ja rajoitettu niin pätee*

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

(eli funktio saavuttaa suurimman arvonsa pisteessä $\mathbf{x}_0$*) missä*

- $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ *(*Ω*:n reuna), tai*
- $\mathbf{x}_0 \in \Omega \setminus \partial\Omega$ *ja* $f'(\mathbf{x}_0) = 0$*, tai*
- $\mathbf{x}_0 \in \Omega \setminus \partial\Omega$ *eikä* f *ole derivoituva pisteessä* $\mathbf{x}_0$*.*

Taylorin polynomi

- *Lineaarisessa approksimointikaavassa esiintyvä polynomi*
$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$
on funktion $f(x, y)$ *1. asteen Taylorin polynomi pisteessä* (x_0, y_0)*.*
- *Funktion* $f(x, y)$ *2. asteen Taylorin polynomi pisteessä* (x_0, y_0) *on*
$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$
$$+\frac{1}{2}f_{xx}(x_0, y_0)(x-x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}f_{yy}(x_0, y_0)(y-y_0)^2.$$
- *Jos* $f(x, y)$ *on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva niin pätee*
$$f(x, y) = p(x, y) + \eta(x, y),$$
missä $p(x, y)$ *on korkeintaan astetta kaksi oleva polynomi ja* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\eta(x,y)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = 0$ **jos ja vain jos** $p(x, y)$ *on funktion* $f(x, y)$ *2. asteen Taylorin polynomi pisteessä* (x_0, y_0)*.*
- *Yleisemmin: Jos* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *niin 2. asteen Taylorin polynomi on*
$$f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathrm{T}} f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Pienimmän neliösumman menetelmä

Jos oletetaan, että yhteys muuttujien y ja $\mathbf{x}$ välillä voidaan kuvata yhtälöllä

$$y \approx c_1 f_1(\mathbf{x}) + c_2 f_2(\mathbf{x}) + \ldots + c_m f_m(\mathbf{x}),$$

ja halutaan määrittää kertoimet c_j kun pisteet $(\mathbf{x}_j, y_j)$, $j = 1, \ldots, n$ ovat tiedossa niin eräs mahdollisuus on minimoida funktio

$$q(c_1, \ldots, c_m) = \sum_{j=1}^{n} \left(c_1 f_1(\mathbf{x}_j) + \ldots + c_m f_m(\mathbf{x}_j) - y_j\right)^2.$$

Minimiarvo saavutetaan kun

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T Y,$$

missä $A(j,k) = f_k(\mathbf{x}_j)$ ja $Y(k,1) = y_k$ koska minimoitavaa funktiota q voidaan esittää muodossa
$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} A(j,k) C(k,1) - Y(j,1)\right)^2 = \|AC - Y\|^2$ *missä* $C(k,1) = c_k$.

Lineaarinen regressio

Jos oletamme, että yhteys muuttujien x ja y välillä on $y \approx a + bx$ ja haluamme minimoida $\sum_{j=1}^{n} (a + bx_j - y_j)^2$ voimme määritellä

$A(j,1) = 1, A(j,2) = x_j$ jolloin ratkaisu on $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T Y$.

Mutta voi olla edullista ensin laskea $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$ ja $\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} y_j$ ja sitten minimoida

$$f(\tilde{a}, b) = \sum_{j=1}^{n} \left(\tilde{a} + b(x_j - \overline{x}) - (y_j - \overline{y})\right)^2.$$

Ehdosta $f_{\tilde{a}}(\tilde{a}, b) = 0$ seuraa $\tilde{a} = 0$ koska $\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x}) = \sum_{j=1}^{n}(y_j - \overline{y}) = 0$ ja ehdosta $0 = f_b(0,b) = 2\sum_{j=1}^{n}\left(b(x_j - \overline{x}) - (y_j - \overline{y})\right)(x_j - \overline{x})$ saamme

$$b = \frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y})}{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2}.$$

Kerroin a lausekkeessa $y = a + bx$ tulee olemaan

$$a = \overline{y} - b\overline{x}.$$

$\substack{\max \\ \min} f(x,y,z) = ?$ kun $g(x,y,z) = 0$ ja Lagrangen kertoimet

Lagrangen kertoimien idea on seuraava: Muodosta uusi funktio

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z),$$

ja ratkaise yhtälösysteemi $L'(x,y,z,\lambda) = 0$ eli

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) + \lambda g_x(x,y,z) &= 0 \\ f_y(x,y,z) + \lambda g_y(x,y,z) &= 0 \\ f_z(x,y,z) + \lambda g_z(x,y,z) &= 0 \\ g(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

Jos funktio $f(x,y,z)$ saavuttaa suurimman tai pienimmän arvonsa kun $g(x,y,z) = 0$ jossain pisteessä (x_0, y_0, z_0) niin jokin seuraavista ehdoista on voimassa:

- *$L'(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = 0$ jollain luvulla λ_0,*
- *$g'(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{0}$,*
- *f tai g ei ole jatkuvasti derivoituva (x_0, y_0, z_0) pisteen läheisyydessä.*

Monta ehtoa ja monta Lagrangen kerrointa

Jos pitää määrittää $\substack{\min \\ \max} f(\mathbf{x}) = ?$ kun $g(\mathbf{x}) = 0$ ja $h(\mathbf{x}) = 0$ niin muodostetaan funktio

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x}) + \mu h(\mathbf{x})$$

ja ratkaistaan yhtälösysteemi

$$L'(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = \mathbf{0}.$$

Mitä Lagrangen kerroin "kertoo"?

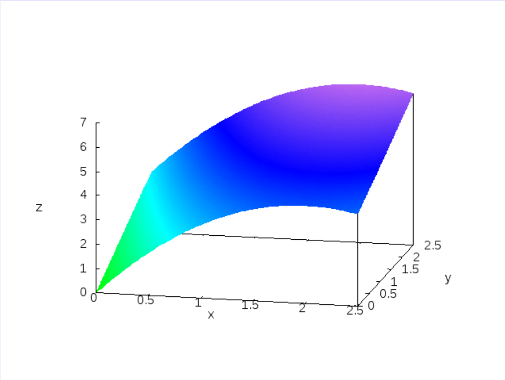
Oleta että funktion $f(\mathbf{x})$ suurin (tai pienin) arvo kun $g(\mathbf{x}) + c = 0$ saavutetaan pisteessä $\mathbf{x}(c)$ ja tämä piste on Lagrangen funktion $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda(g(\mathbf{x}) + c)$ nollakohta, eli $L'(\mathbf{x}(c), \lambda(c)) = \mathbf{0}$. Jos nyt $h(c) = f(\mathbf{x}(c))$ on maksimiarvo (tai minimiarvo) niin pätee $h'(c) = \lambda(c)$. Lagrangen kerroin siis kertoo miten maksimi- tai minimiarvo riippuu muutoksista rajoitusehdossa.

Tasointegraali, määritelmä I

Jos $f(x,y) \geq 0$ *niin*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A$$

on kappaleen $\{\,(x,y,z) : (x,y) \in D,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\,\}$ *tilavuus.*



Tilavuus, askelfunktiot ja integraalit

- *Suorakulmaisen särmiön tilavuus on särmien pituuksien tulo.*
- *Funktio* $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *on askelfunktio jos on olemassa luvut* $x_0 < x_1 \ldots < x_m$, $y_0 < y_1 < \ldots < y_n$ *ja* $c_{j,k}$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq n$ *siten, että*

$$f(x,y) = \begin{cases} c_{j,k}, & \text{jos } x_{j-1} \leq x < x_j \text{ ja } y_{k-1} \leq y < y_k, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

- *Askelfunktion* $f(x,y)$ *tasointegraali on*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}A = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} c_{j,k}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}),$$

eli xy-tason, funktion $f(x,y)$ *ja tasojen* $x = x_j$ *sekä* $y = y_k$ *rajoittamien suorakulmaisten särmiöden tilavuuksien summa missä xy tason alapuolella olevien särmiöiden tilavuudet on otettu negatiivisina.*

Tasointegraali, määritelmä II

Jos funktio $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *on sellainen että löytyy jono askelfunktioita* $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ *siten*

- $\mathbf{1}_D(x,y)f(x,y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x,y)$ *melkein kaikilla* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *(missä* $\mathbf{1}_D(x,y)f(x,y) = f(x,y)$ *jos* $(x,y) \in D$ *ja 0 muuten).*
- $\sum_{n=1}^{\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} |f_n(x,y) - f_{n+1}(x,y)|\,\mathrm{d}A < \infty$,

niin f *on integroituva joukossa* D *ja*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} f_n(x,y)\,\mathrm{d}A.$$

Huom!

Jotta yllä olevasta määritelmästä tulisi kunnon määritelmä on osoitettava, että $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A$ *ei riipu siitä miten askelfunktiot* f_n *on valittu, eikä tämä ole aivan yksinkertainen asia todistaa.*
Tätä määritelmää käytettäessä ei tarvitse puhua epäoleellisista integraaleista mutta $|f|$ *on integroituva jos* f *on integroituva.*

Jatkuvat funktiot ovat integroituvia

Jos $D = [a,b] \times [c,d]$ *ja* $f : D \to \mathbb{R}$ *on jatkuva niin* f *on integroituva joukossa* D *ja*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \lim_{\max\{(x_j - x_{j-1}),(y_k - y_{k-1})\}\to 0} \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_j,y_j)(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}).$$

Ääretön integraali

Jos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *on ei-negatiivinen ja funktiot* $f_n(x,y) = \mathbf{1}_{C_n}(x,y)\min(n, f(x,y))$, *missä* $C_n = \{\,(x,y) : x^2 + y^2 \leq n^2\,\}$ *ovat integroituvia joukossa* D *ja* $\lim_{n\to\infty} \iint_D f_n(x,y)\,\mathrm{d}A = \infty$ *niin sanomme, että* $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \infty$. *Samoin, jos* $f(x,y) = f_+(x,y) - f_-(x,y)$ *missä* $f_+(x,y) \geq 0$ *ja* $f_-(x,y) \geq 0$, $\iint_D f_+(x,y)\,\mathrm{d}A = \infty$ *ja* f_- *on integroituva joukossa* D, *jolloin* $\iint_D f_-(x,y)\,\mathrm{d}A < \infty$ *niin* $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \infty$.

Iteroidut integraalit ja integroimisjärjestyksen vaihto eli Fubinin lause

Jos $-\infty \le a < b \le \infty$, $-\infty \le c < d \le \infty$ *ja*

$$\iint_{(a,b)\times(c,d)} |f(x,y)|\,\mathrm{d}A < \infty \quad \text{tai} \quad \int_a^b \left(\int_c^d |f(x,y)|\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x < \infty$$

$$\text{tai} \quad \int_c^d \left(\int_a^b |f(x,y)|\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y < \infty$$

(ja f on askelfunktioiden (tai jatkuvien funktioiden) raja-arvo melkein kaikissa pisteissä niin kaikki integraalit ovat olemassa ja

$$\iint_{(a,b)\times(c,d)} f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Huom!

Tasointegraalit lasketaan tavallisesti siten, että ne kirjoitetaan edellisen tuloksen (ns. Fubinin lauseen) nojalla iteroituna integraalina ja silloin, kuten erityisesti myös integroimisjärjestystä vaihdettaessa, ongelmaksi voi muodostua kysymys siitä mitä integroimisarajat ovat:

$$\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_?^? \left(\int_{?(y)}^{?(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$$

Joskus on myös syytä kirjoittaa oikean puolen lauseke useamman integraalin summana.

Huom!

Vaikka tasointegraalit on tässä määritelty "tilavuuksina" niin käytännön sovelluksissa tasointegraali on tilavuus ainoastaan jos molempien muuttujien ja integroitavan funktion yksikkönä on pituusyksikkö ja näin ei tietenkään useimmiten ole asian laita.

Tasointegraalin ominaisuuksia

- $\iint_D 1\,\mathrm{d}A$ *on joukon D pinta-ala.*
- $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = 0$ *jos joukon D pinta-ala on* 0.
- *Jos* $f(x,y) \ge 0$ *joukossa D niin* $V = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A$ *on joukon* $\{\,(x,y,z) : (x,y) \in D, 0 \le z \le f(x,y)\,\}$ *tilavuus.*
- $\iint_D \Big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\Big)\,\mathrm{d}A = \alpha \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A + \beta \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}A$.
- *Jos* $f(x,y) \le g(x,y)$, $(x,y) \in D$ *niin* $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A \le \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}A$.
- $\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}A$.
- $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \sum_{j=1}^k \iint_{D_j} f(x,y)\,\mathrm{d}A$ *mikäli* $D = \cup_{j=1}^k D_j$ *ja joukon* $D_i \cap D_j$ *pinta-ala on* 0 *kun* $i \ne j$.
- $\int_a^b \int_c^d f(x)g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y$.
- *Jos funktiot* f_n, $n \ge 1$ *ja g ovat integroituvia joukossa* $D \subset \mathbb{R}^2$, *(siis erityisesti* $\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}A < \infty$*),* $\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y)$ *ja* $|f_n(x,y)| \le g(x,y)$ *melkein kaikilla* $(x,y) \in D$ *niin* $\lim_{n\to\infty} \iint_D f_n(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A$.

Majoranttiperiaate

Jos

- $0 \le f(x,y) \le g(x,y)$ *kun* $(x,y) \in D$ *(ja f on askelfunktioiden raja-arvo),*
- *g on integroituva joukossa D, eli*

$$\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}A < \infty,$$

niin f on integroituva joukossa D, eli

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A < \infty.$$

Avaruusintegraalit

Integraalia $\iiint_W f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$ *määritellään ja lasketaan "samalla tavalla' kuin tasointegraali!*

$$\text{tilavuus}(W) = \iiint_W 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Muuttujien vaihto tasointegraaleissa

Jos muuttujien x ja y sijasta integraalissa $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ otetaan käyttöön muuttujat s ja t siten, että

$$x = x(s,t),$$
$$y = y(s,t),$$

ja siten, että $(x,y) \in D$ jos ja vain jos $(s,t) \in D_*$ (ja kuvaus on bijektio, mahdollisesti lukuunottamatta joukkoa jonka pinta-ala on 0) niin

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_*} f(x(s,t),y(s,t)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t,$$

$$\textit{missä} \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t}. \end{bmatrix}\right)$$

Huomaa myös, että

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}}.$$

Napakoordinaatit

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} r \geq 0 \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Pallokoordinaatit

$$\begin{cases} x = \rho\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho \geq 0 \\ \theta \in [0, 2\pi] \\ \varphi \in [0, \pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho^2\sin(\varphi)\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Muuttujien vaihto avaruusintegraalissa

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

Esimerkki: Muuttujien vaihto

Jos haluamme määrittää sekä pallon $x^2+y^2+z^2 = 2a^2$ että sylinterin $x^2+y^2 = a^2$ sisäpuolelle jäävän kappaleen tilavuus, eli joukon $\{\,(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 2a^2,\ x^2+y^2 \leq a^2\,\}$ tilavuus niin yksinkertaisinta on käyttää sylinterikoordinaatit $[r,\theta,z]$ missä $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ jolloin $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$. Näillä koordinaateilla joukoksi tulee $\{\,[r,\theta,z] : 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ z^2 \leq 2a^2 - r^2\,\}$ ja tilavuus on

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_{-\sqrt{2a^2-r^2}}^{\sqrt{2a^2-r^2}} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a r\left(\sqrt{2a^2-r^2} - \left(-\sqrt{2a^2-r^2}\right)\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a 2r\sqrt{2a^2-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \Big/_0^a \left(-\frac{2}{3}\right)(2a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}, \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(-(a^2)^{\frac{3}{2}} + (2a^2)^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{4\pi a^3}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

Esimerkki: Muuttujien vaihto, jatk.

Jos sylinterikoordinaatien sijasta käytämme pallokoordinaatteja, eli $x = \rho\sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\varphi)\sin(\theta)$ *och* $z = \rho\cos(\varphi)$ *niin* $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ *ja integroimisrajoiksi tulee* $0 \le \theta < 2\pi$, $0 \le \varphi \le \pi$ *och* $0 \le \rho \le \max\{\sqrt{2}a, \frac{a}{\sin(\varphi)}\}$. *Nyt* $\sqrt{2}a \ge \frac{a}{\sin(\varphi)}$ *kun* $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ *ja* $\frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \pi$ *joten voimme jakaa integraalin kahteen osaan ja rajoittaa muuttujaa* φ *välille* $[0, \frac{p}{i}2]$ *mutta kertoa tulosta kahdella jolloin tilavuus on*

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{2}} \rho^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta + 2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{a}{\sin(\varphi)}} \rho^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(\varphi)\right)\left(\int_0^{a\sqrt{2}}\rho^2\,\mathrm{d}\rho\right)$$

$$+ 2\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\Big/_0^{\frac{a}{\sin(\varphi)}}\frac{\rho^3}{3}\sin(\varphi)\right)\mathrm{d}\varphi\right) =$$

Esimerkki: Muuttujien vaihto, jatk.

$$= 4\pi\left(\Big/_0^{\frac{\pi}{4}}(-\cos(\varphi))\right)\left(\Big/_0^{a\sqrt{2}}\frac{\rho^3}{3}\right) + 4\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3}{3\sin(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{4\pi a^3}{3}\Big/_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}\right)$$

$$= \frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{4\pi a^3}{3} = \frac{4\pi a^3}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$