

MS-A0207 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (Chem)

Yhteenveto, osa I

G. Gripenberg

Aalto-yliopisto

21. tammikuuta 2016

- 1 Usean muuttujan funktiot
- 2 Raja-arvot
- 3 Jatkuvat funktiot
- 4 Osittaisderivaatat
- 5 Derivaatta eli gradientti
- 6 Lineaarinen approksimointi
- 7 Newtonin menetelmä

💡 Usean muuttujan vai vektorimuuttujan funktiot

- Funktio $f : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ on "sääntö" tai "yhteys" (usein mutta ei suinkaan välttämättä, kaava) joka **jokaiseen** määrittelyjoukon D alkioon (x_1, x_2, \dots, x_d) liittää **yksikäsitteisen** "arvon" $f(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}$.
- Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ arvot ovat vektoreita ja vektorin \mathbf{f} jokainen komponentti on funktio: $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eli

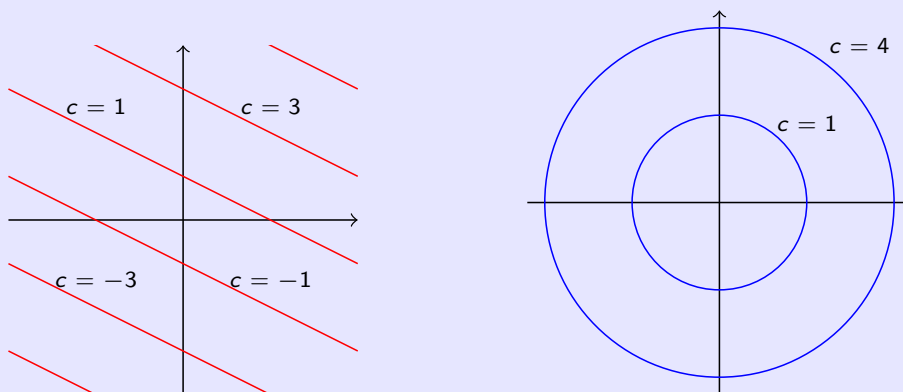
$$\mathbf{f}(x_1, \dots, x_d) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_d) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_d) \end{bmatrix}$$

- Usein voi olla hyödyllistä, että sen sijaan että käsittelemme funktiota $f(x_1, x_2, \dots, x_d)$ usean muuttujan funktiona käsittelemme sitä yhden **vektorimuuttujan** \mathbf{x} funktiona $f(\mathbf{x})$ missä vektorilla \mathbf{x} on d komponenttia.
- Useimmiten otamme funktion argumentit pystyvektorina jolloin funktion derivaatta eli gradientti (kun funktio on reaaliarvoinen) on vaakavektori.

💡 Tasa-arvokäyrät

Jos $f(x, y)$ on kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio ja $c \in \mathbb{R}$ niin joukko $\{(x, y) : f(x, y) = c\}$ on usein käyrä (tai sitten käyrien unioni) eli funktion **tasa-arvokäyrä**. Kuvio, jossa on piirrettynä monta tällaista tasa-arvokäyrää antaa tietynlaista informaatiota funktiosta.

Funktion $f(x, y) = x + 2y$ tasa-arvokäyrät ovat suoria kun taas funktion $g(x, y) = x^2 + y^2$ tasa-arvokäyrät ovat ympyröitä:



Kolmen muuttujan tapauksessa saadaan vastaavasti **tasa-arvopintoja**.

💡 Raja-arvo, määritelmä I

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$ jos $|f(x,y) - L|$ on "pieni" aina kun $\|(x,y) - (x_0,y_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ on "riittävän pieni" ja $(x,y) \neq (x_0,y_0)$.

💡 Raja-arvo, määritelmä II

$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$ jos $|f(\mathbf{x}) - L|$ on "pieni" kun $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ on "riittävän pieni" ja $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$.

💡 Vektorin pituus

Vektorin \mathbf{x} pituus, kun sen komponentit ovat x_1, x_2, \dots, x_d , on tässä

$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$ mutta raja-arvot eivät riipu siitä miten vektorin "pituus" on määritelty kunhan sillä on normaalit "pituuden" ominaisuudet.

😊 Raja-arvo, määritelmä III

$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$ jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että jos $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ ja $\mathbf{x} \in \Omega$ niin pätee $|f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon$.

💡 Raja-arvo, ominaisuudet

Jos $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = F$ ja $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = G$ niin pätee

- $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})) = \alpha F + \beta G,$
- $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = FG,$
- $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{F}{G}$ jos $G \neq 0$.

Tästä seuraa, että raja-arvot, joiden määrittäminen on hankalaa ja näin ollen vaativat eniten työtä, ovat ne, joissa sijoitus antaa tulokseksi $\frac{0}{0}$.

💡 Raja-arvo, kuristusperiaate

- Jos $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = 0$ ja $|f(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$ (kun $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$) niin $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 0$.
- Jos $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = L$ ja $g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ (kun $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$) niin $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$.

💡 Raja-arvo säteitä pitkin

Jos f on yhden reaalimuuttujan funktio niin sillä on raja-arvo pisteessä t_0 jos ja vain jos oikean- ja vasemmanpuoliset raja-arvot ovat samat.

Useamman muuttujan tapauksessa tilanne on osittain toinen:

- Jos raja-arvo $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)$ **ei** ole riippumaton parametrien α ja β arvoista niin raja-arvo $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ **ei** ole olemassa.
- Jos $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) = L$ kaikilla α ja β joilla $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ niin tästä seuraa ainoastaan, että **jos** raja-arvo on olemassa niin se on L .

😊 Epäyhtälöitä ym.

- Jos $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = F$, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = G$ ja $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ kun $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ niin pätee $F \leq G$.
- Jos $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = F$ niin pätee $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = F$.
- Jos $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = G$ ja $g(\mathbf{x}) \neq G$ kun $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ niin pätee $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(g(\mathbf{x})) = \lim_{t \rightarrow G} f(t)$.

💡💡 Jatkuvat funktiot

- Funktio $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ on **jatkuva pisteessä** \mathbf{x}_0 jos $\mathbf{x}_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ja

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$$

eli Ω on \mathbb{R}^d :n osajoukko, \mathbf{x}_0 kuuluu joukkoon Ω , $f(\mathbf{x}_0)$ on määritelty, raja-arvo on olemassa ja se on $f(\mathbf{x}_0)$.

- Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ on **jatkuva joukossa** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ jos

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) \quad \text{kaikilla } \mathbf{x}_0 \in \Omega.$$

eli jos se on jatkuva joukon Ω jokaisessa pisteessä.

💡 Jatkuvat vektoriarvoiset funktiot

Funktio $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, (joukossa Ω), jos jokainen komponentti on jatkuva pisteessä $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, (joukossa Ω).

💡💡 Jatkuvien funktioiden summa, tulo ja osamäärä

Jos f ja $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ovat jatkuvia joukossa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ niin

- $\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})$ ja $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ ovat jatkuvia joukossa Ω ,
- $\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$ on jatkuva joukossa $\{\mathbf{x} \in \Omega : g(\mathbf{x}) \neq 0\}$.

💡💡 Jatkuvien funktioiden yhdistetty funktio on jatkuva

Jos $g : \Omega_g \rightarrow \Omega_f$ ja $f : \Omega_f \rightarrow \mathbb{R}^m$, missä $\Omega_g \subseteq \mathbb{R}^d$ ja $\Omega_f \subseteq \mathbb{R}^p$, ovat jatkuvia määrittelyjoukoissaan niin funktio $(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$ on jatkuva joukossa Ω_g .

💡💡 Huom!

Jos funktio $f(x, y)$ on jatkuva (esim. \mathbb{R}^2 :ssa) niin funktio $x \mapsto f(x, y)$ on jatkuva kaikilla parametrin y arvoilla ja funktio $y \mapsto f(x, y)$ on jatkuva kaikilla parametrin x arvoilla.

Mutta jos ainoastaan oletamme, että funktio $x \mapsto f(x, y)$ on jatkuva kaikilla y ja funktio $y \mapsto f(x, y)$ on jatkuva kaikilla x niin tästä **ei** välttämättä seuraa, että funktio $(x, y) \mapsto f(x, y)$ olisi jatkuva.

💡💡 Osittaisderivaatat

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

💡 Erilaisia merkintätapoja

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = D_x f = f_1 = D_1 f = D^{(1,0)} f \dots$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D^{(1,1)} f.$$

💡💡 Derivoimisjärjestyksen vaihto

Jos f_x , f_y , f_{xy} ja f_{yx} ovat olemassa ja jatkuvia niin pätee

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

💡💡 Derivaatta

Funktio $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä \mathbf{x} jos on olemassa (rivi)vektori, joka merkitään $f'(\mathbf{x})$:llä siten, että

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})\mathbf{h}|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Tässä $f'(\mathbf{x})\mathbf{h}$ on $1 \times d$ -rivivektorin $f'(\mathbf{x})$ ja $d \times 1$ -sarakevektorin \mathbf{h} matriisitulo, ja se voidaan myös esittää pistetulon muodossa $f'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$ jos ei haluta tehdä eroa rivi- ja pystyvektorien välillä.

Muita usein käytettyjä derivaatan merkintöjä ovat $\nabla f(\mathbf{x})$ ja $Df(\mathbf{x})$.

💡💡 Derivaatta ja osittaisderivaatat

Jos funktiolla $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuvat osittaisderivaatat niin f on derivoituva ja

$$f'(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x}) = [f_{x_1}(\mathbf{x}) \quad f_{x_2}(\mathbf{x}) \quad \dots \quad f_{x_d}(\mathbf{x})].$$

💡💡 "Jatkuvasti derivoituva" \Leftrightarrow "Derivoituva ja derivaatta on jatkuva"

💡💡 Vektoriarvoisen funktion derivaatta

Funktio $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ on derivoituva pisteessä \mathbf{x} jos jokainen komponentti on derivoituva pisteessä \mathbf{x} , eli on olemassa $m \times d$ matriisi $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ siten, että

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Matriisin $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ rivivektorit ovat vektorin \mathbf{f} komponenttien derivaatat ja $\mathbf{f}'(\mathbf{x})(i, j) = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$. (Tätä matriisiä kutsutaan usein Jacobin matriisiksi.)

💡💡 Ketjusääntö

Jos $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ missä \mathbf{f} ja \mathbf{g} ovat derivoituvia niin pätee

$$\mathbf{h}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x}).$$

Huomaa, että tässä oletetaan, että \mathbf{x} , \mathbf{g} ja \mathbf{f} ovat sarakevektoreita (mahdollisesti vain yhdellä komponentilla) ja on tärkeätä että ketjusääntö kirjoitetaan järjestyksessä $\mathbf{f}'(\mathbf{g})\mathbf{g}'$ koska jos $\mathbf{g} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ ja $\mathbf{f} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ niin \mathbf{f}' on $m \times p$ -matriisi ja \mathbf{g}' on $p \times d$ -matriisi jolloin matriisitulo $\mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x})$ on hyvin määritelty.

💡 Suunnattu derivaatta

Funktion f suunnattu derivaatta pisteessä \mathbf{x} suuntaan \mathbf{u} on funktion $t \mapsto f(\mathbf{x} + t \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \mathbf{u})$ derivaatta pisteessä 0 ja on näin ollen

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{u} \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \left(\frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \mathbf{u} \right),$$

ja se kertoo miten nopeasti funktio f kasvaa tai vähenee kun kuljetaan pisteestä \mathbf{x} suuntaan \mathbf{u} .

Huomaa, että $D_{\mathbf{i}}f(x, y, z) = f_x(x, y, z)$, $D_{\mathbf{j}}f(x, y, z) = f_y(x, y, z)$ ja $D_{\mathbf{k}}f(x, y, z) = f_z(x, y, z)$, eli osittaisderivaatat ovat suunnatut derivaatat koordinaattiakselien (positiivisiin) suuntiin.

💡💡 Mihin suuntaan osoittaa gradientti?

Suunnattu derivaatta $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ pisteessä \mathbf{x} on suurimmillaan kun $\mathbf{u} \uparrow \nabla f(\mathbf{x})$ (ja pienin vastakkaiseen suuntaan) joten **funktio kasvaa nopeimmin gradientin suuntaan**.

Suunnattu derivaatta on 0 kun $\mathbf{u} \perp \nabla f(\mathbf{x})$ joten **gradientti on kohtisuorassa tasa-arvokäyriä (tai -pintoja) kohti**.

💡💡 Lineaarinen approksimointi

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \approx f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})\mathbf{h} = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h},$$

tai toisella tavalla esitettynä

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) \\ \approx f_x(x, y, z)\Delta x + f_y(x, y, z)\Delta y + f_z(x, y, z)\Delta z. \end{aligned}$$

😊 Tangenttitaso

Koska gradientti on kohtisuorassa tasa-arvopintoja kohti niin pinnan $f(x, y, z) = c$ normaali pisteessä (x_0, y_0, z_0) on

$$f'(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k},$$

ja pinnan tangenttitasolla pisteessä (x_0, y_0, z_0) on yhtälö

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

💡💡 Lineaarinen approksimointi ja suhteelliset virheet, erikoistapaus

Jos

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

niin lineaarisella approksimoinnilla saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{f} &= \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \\ &\approx \alpha_1 \frac{\Delta x_1}{x_1} + \alpha_2 \frac{\Delta x_2}{x_2} + \dots + \alpha_n \frac{\Delta x_n}{x_n}, \end{aligned}$$

ja erityisesti

$$\left| \frac{\Delta f}{f} \right| \lesssim |\alpha_1| \left| \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + |\alpha_2| \left| \frac{\Delta x_2}{x_2} \right| + \dots + |\alpha_n| \left| \frac{\Delta x_n}{x_n} \right|.$$

💡💡 Newtonin menetelmä: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = ?$

Jos $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ niin pätee

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \Delta \mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n) \Delta \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \Delta \mathbf{x} \approx -\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

ja jotta $\mathbf{x}_{n+1} \approx \mathbf{x}_n + \Delta \mathbf{x}$ valitsemme

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n).$$

Kääntematriisin $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1}$ laskeminen ei ole välttämätöntä mutta meidän pitää ratkaista yhtälösystemi

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_n).$$

💡 Milloin Newtonin menetelmä suppenee?

Jos $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ on jatkuvasti derivoituvia, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$, $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_*)$ on kääntyvä matriisi ja jos $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_*\|$ on riittävän pieni (mille voi antaa riittävä ehto) niin pätee $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_*$, mutta muuten ei ole takeita siitä, että menetelmä konvergoi ja vaikeus on löytää sopiva alkuarvo (ja tietää milloin pitää luovuttaa jos näyttää siltä ettei menetelmä konvergoikaan).

💡💡 Newtonin menetelmä

Jos haluamme käyttää Newtonin menetelmää yhtälösystemin $x^2 + 4y^2 = 4$, $x^2 - 2x = y - 1$ ratkaisemiseksi niin kirjoitamme ensin systeemin muodossa $\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, missä siis

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} x^2 + 4y^2 - 4 \\ x^2 - 2x - y + 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Silloin

$$\mathbf{f}'(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 2x & 8y \\ 2x - 2 & -1 \end{bmatrix},$$

ja meidän pitää laskea

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n - \mathbf{f}'(\mathbf{X}_n)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{X}_n), \quad n \geq 0.$$

Jos valitsemme $X_0 = \frac{3}{2}$ ja $y_0 = \frac{1}{2}$ niin saamme

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

💡💡 Newtonin menetelmä, jatk.

Jos käytämme laskuihin Matlab/Octavea niin määrittelemme ensin funktion \mathbf{f} komennolla

```
f=@(X) [X(1)^2+4*X(2)^2-4;X(1)^2-2*X(1)-X(2)+1]
```

ja sitten sen derivaatan \mathbf{f}' komennolla

```
df=@(X) [2*X(1),8*X(2);2*X(1)-2,-1]
```

Sitten valitsemme $X = [1.5; 0.5]$ ja laskemme monta kertaa $X = X - \mathbf{df}(X)^{-1} * \mathbf{f}(X)$ (tai $X = X - \mathbf{df}(X) \setminus \mathbf{f}(X)$) ja tuloksena saamme

$$\begin{array}{ll} \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1.7500000000000000 \\ 0.5000000000000000 \end{bmatrix} & \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 1.717105263157895 \\ 0.513157894736842 \end{bmatrix} \\ \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 1.716438375580136 \\ 0.513283501264863 \end{bmatrix} & \mathbf{X}_4 = \begin{bmatrix} 1.716438125054029 \\ 0.513283587030869 \end{bmatrix} \\ \mathbf{X}_5 = \begin{bmatrix} 1.716438125053991 \\ 0.513283587030878 \end{bmatrix} & \mathbf{X}_6 = \begin{bmatrix} 1.716438125053991 \\ 0.513283587030878 \end{bmatrix} \end{array}$$