

MS-A0207 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (Chem) Gripenberg, Nieminen, Ojanen, Tiilikainen, Weckman
 Harjoitus 6
 8.2–12.2.2016, viikko 6

Palauta P-tehtävät ja vastaa S-tehtäviin viimeistään 12.2.2016 klo. 18:00 HUOM!!
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Laske integraali

$$\iint_D \frac{x^2}{1+y^4} dA,$$

kun $D = \{(x, y) : 0 < x < 3y < 3\}$.

Vihje: On tärkeää (jos haluat selvittää yksinkertaisilla laskuilla) valita oikein lasketko integraalin $\int_{?}^{?} \left(\int_{?}^{?} f(x, y) dx \right) dy$ vai $\int_{?}^{?} \left(\int_{?}^{?} f(x, y) dy \right) dx$, eli missä järjestyksessä integroit.

Lisäksi on syytä muistaa, että $\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \int_a^b \ln(f(t))$.

Vastaus: $\frac{1}{6} \ln(2)$.

P2. Vaihda integroimisjärjestys integraalissa $\int_0^1 \left(\int_1^{1/y^2} e^{-\sqrt{x}} dx \right) dy$ ja laske integraali.

Piirrä kuivio integroimisalueesta!

P3. Kappale muodostuu kaikista pisteistä joiden y -koordinaatti on positiivinen ja jotka sijaitsevat xy -tason yläpuolella, tason $z = x + y + 4$ alapuolella ja sylinterin $x^2 + y^2 = 4$ sisäpuolella. Määritä tämän kappaleen tilavuus. (Oleta, että z -akseli on pystysuora jolloin ” xy -tason yläpuolella” tarkoittaa $z > 0$.)

Vastaus: $\frac{8}{9} + \frac{2}{3}$.

P4. Kappale A muodostuu kaikista pisteistä pallon $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ sisäpuolella ja kartion $z^2 = x^2 + y^2$ ulkopuolella (eli $z^2 \leq x^2 + y^2$). Laske A :n tilavuus pallokoordinaattien avulla.

Vihje: Suorakulmaiset koordinaatit esitettyinä pallokoordinaattien avulla ovat

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi), \\ y = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \\ z = \rho \cos(\varphi), \end{cases}$$

ja silloin $dx dy dz = \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\theta d\varphi$.

P5. Funktiosta f tiedetään, että $f(x, y) \leq (1 + y^2 + x^7)^{-1} e^{-y}$ kun $x, y \geq 0$. Määritä luku L (mutta ei välttämättä pienin mahdollinen) siten, että $\iint_D f(x, y) dA \leq L$ kun D on ensimmäinen neliö $D = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ käyttämällä esimerkiksi epäyhtälöitä $(1 + y^2 + x^7)^{-1} \leq 1$ (kun $0 \leq x \leq 1$) ja $(1 + y^2 + x^7)^{-1} \leq x^{-7}$ (kun $x \geq 1$).

Vastaus: $L = \frac{7}{9}$.