Aalto-yliopisto

MS-A0207 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (Chem) Gripenberg, Nieminen, Ojanen, Tiilikainen, Weckman
Harjoitus 5
1.2–5.2.2016, viikko 5

Palauta P-tehtävät ja vastaa S-tehtäviin viimeistään 8.2.2016 klo. 15:00.
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Määritä Langrangen kertoimen avulla etäisyyden neliö pisteestä (x_0, y_0) suoraan $Ax + By = C$ (eli etäisyyden neliön minimi pisteestä (x_0, y_0) johonkin suoran pisteeseen ja tässä oletetaan, että $A^2 + B^2 > 0$) . Millä perusteilla voit olla varma siitä, että olet löytänyt minimipisteen?

P2. Määritä funktion $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$ pienin arvo kun $x + y + z = 4$ ja $x + y - z = 6$ käyttämällä kaksi Lagrangen kerrointa. (Huomaa, että silloin määrität etäisyyden neliön pisteestä $(1, 2, 3)$ tasojen $x + y + z = 4$ ja $x + y - z = 6$ leikkaussuoraan.)

Vastaus: 18

P3. Määritä etäisyyden neliön minimiarvo pisteestä $(0, -1)$ johonkin käyrän $y = \sqrt{1 - x^2}$ pisteeseen käyttämällä Lagrangen kerrointa. Onnistutko?

P4. Jos pisteet (x_j, y_j), $j = 1, \ldots, n$ on annettu niin voit määrittää vakiot a ja b siten, että $y \approx a + bx$ minimoimalla neliösummaa $\sum_{j=1}^{n}(a + bx_j - y_j)^2$ jolloin saat

$$b = \frac{\sum_{j=1}(x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y})}{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2} \quad \text{ja} \quad a = \overline{y} - b\overline{x},$$

missä $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$ ja $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j$.

Jos tämän sijasta kirjoitat $x \approx \alpha + \beta y$ ja minimoit $\sum_{j=1}^{n}(\alpha + \beta y_j - x_j)^2$ niin saat vastaukseksi

$$\beta = \frac{\sum_{j=1}(x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y})}{\sum_{j=1}^{n}(y_j - \overline{y})^2} \quad \text{ja} \quad \alpha = \overline{x} - \beta\overline{y}$$

(a) Millä ehdolla saat saman suoran molemmissa tapauksissa?
(b) Mikä on neliösumman $\sum_{j=1}^{n}(a + bx_j - y_j)^2$ minimiarvo siinä tapauksessa, että saat saman suoran.

Vihje: Voit olettaa, että $\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2 > 0$ *ja* $\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2 > 0$. *Kannattaa kirjoittaa neliösumman minimiarvoa muodossa* $\sum_{j=1}^{n}(b(x_j - \overline{x}) - (y_j - \overline{y}))^2$ *ja vasta sitten laskea neliöt.*

P5. Konjugaati-gradientti-menetelmä funktion f minimin löytämiseksi toimii seuraavalla tavalla: Valitaan alkupiste $\mathbf{x}_0$ ja suunta $\mathbf{s}_0 = -f'(\mathbf{x}_0)^{\mathrm{T}}$ (tässä siis oletetaan, että $f'(\mathbf{x}_0)$ on rivivektori jolloin $\mathbf{s}_0$ on pystyvektori kuten $\mathbf{x}_0$). Sitten valitaan $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + t_0\mathbf{s}_0$, missä t_0 määräytyy ehdosta $f(\mathbf{x}_0 + t_0\mathbf{s}_0) = \min_{t\in\mathbb{R}} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{s}_0)$ (eli ratkaistaan yksinkertaisempi, yhden muuttujan, minimointiprobleema). Sitten valitaan

$$\mathbf{s}_1 = -f'(\mathbf{x}_1)^{\mathrm{T}} + \frac{\|f'(\mathbf{x}_1)\|^2}{\|f'(\mathbf{x}_0)\|^2}\mathbf{s}_0,$$

ja jatketaan samalla tavalla, eli $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + t_n\mathbf{s}_n$ missä $f(\mathbf{x}_n + t_n\mathbf{s}_n) = \min_{t\in\mathbb{R}} f(\mathbf{x}_n + t\mathbf{s}_n)$ ja

$$\mathbf{s}_{n+1} = -f'(\mathbf{x}_{n+1})^{\mathrm{T}} + \frac{\|f'(\mathbf{x}_{n+1})\|^2}{\|f'(\mathbf{x}_n)\|^2}\mathbf{s}_n \quad n \geq 0.$$

Vaihtoehtoisesti voidaan valita

$$\mathbf{s}_{n+1} = -f'(\mathbf{x}_{n+1})^{\mathrm{T}} + \frac{\|f'(\mathbf{x}_{n+1})\|^2 - f'(\mathbf{x}_{n+1})f'(\mathbf{x}_n)^{\mathrm{T}}}{\|f'(\mathbf{x}_n)\|^2}\mathbf{s}_n.$$

Osoita, että funktio f pienenee kun kuljetaan pisteestä $\mathbf{x}_{n+1}$ suuntaan $\mathbf{s}_{n+1}$ eli että suunnattu derivaatta pistessä $\mathbf{x}_{n+1}$ suuntaan $\mathbf{s}_{n+1}$ on negatiivinen ellei $f'(\mathbf{x}_{n+1}) = \mathbf{0}$.