Aalto-yliopisto

MS-A0207 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (Chem) Gripenberg, Nieminen, Ojanen, Tiilikainen, Weckman
Harjoitus 3
18.1–22.1.2016, viikko 3

Palauta P-tehtävät ja vastaa S-tehtäviin viimeistään 25.1.2016 klo. 15:00.
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Teollista prosessia säädetään kahden parametrin, x ja y, avulla ja tavoitteena on haitallisen sivutuotteen määrän pienentäminen. Kun parametriä x kasvatettiin ja parametriä y pienennettiin yhtä paljon niin sivutuotteen määrä pieneni 2 yksikköä, ja kun ainoastaan parametriä x pienennettiin (yhtä paljon kuin mitä se kasvatettiin edellisessä tapauksessa) haitallisen sivutuotteen määrä kasvoi 3 yksikköä. Päättele lineaarisen approksimoinnin avulla millä tavalla parametrejä x ja y olisi muutettava jotta sivutuotteen määrä pienenisi mahdollisimman paljon.

Vihje: Oleta, että $f(x,y)$ on sivutuotteen määrä ja että h on parametrien muutosten itseisarvo ja käytä lineaarista approksimointia. Muista myös, että funktio kasvaa nopeimmin gradientin suuntaan.

Vastaus: $\Delta x > 0$, $\Delta y = \frac{1}{3}\Delta x$.

P2. Kartan paperi kutistuu 0.5% x-akselin suunnassa ja 1.5% y-akselin suunnassa. Arvioi derivaatan avulla montako % janan (esim. pisteestä $(0,0)$ pisteeseen (x,y)) pituus muuttuu jos janan ja x-akselin välinen kulma on $60°$ eli $\frac{\pi}{3}$.

Vihje: Voit olettaa, että origo pysyy paikallaan mutta piste (x,y) siirtyy pisteeseen $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ ja muista, että x-akselin ja pisteestä $(0,0)$ pisteeseen (x,y) kulkevan janan välinen kulma on $60°$ kun $\frac{y}{x} = \sqrt{3}$.

Vastaus: Pituus pienenee noin 1.25 %

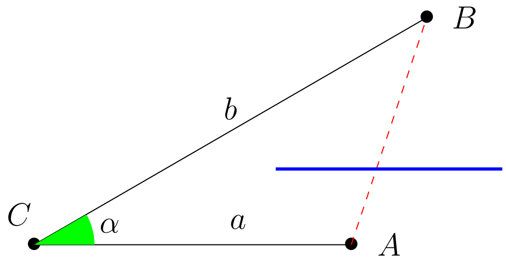
P3.

(a) Johda iteraatiokaava, jolla voidaan ratkaista yhtälösysteemi $s^2 + 9t^2 = 18$, $st = 3$ Newtonin menetelmän avulla ja laske yksi iteraatiokierros alkuarvoilla $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} s_0 \\ t_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(b) Alkuarvoilla $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ saamme approksimaatiot $\mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 2.9844 \\ 1.0052 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} 2.9922 \\ 1.0026 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{x}_9 = \begin{bmatrix} 2.9961 \\ 1.0013 \end{bmatrix}$ joten näyttää siltä, että approksimaatiot suppenevat kohti ratkaisua $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Suppenevatko ne niin nopeasti kun olisi odotettavissa, ja ellei, mistä tämä voisi johtua?

Vihje: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

P4. Sinun pitää määrittää pisteiden A ja B välinen etäisyys mutta koska niiden välillä on seinä niin mittaat pisteiden A ja C ja pisteiden B ja C väliset etäisyydet a ja b sekä kulman $\alpha = \angle ACB$ jolloin voit laskea pisteiden A ja B välisen etäisyyden kosinikaavalla $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)}$.



Jos nyt $a \approx 420$ cm ja $b \approx 600$ cm ja molempien kohdalla mittausvirhe on itseisarvoltaan korkeintaan 0.5 cm niin miten tarkasti sinun pitäisi mitata kulma $\alpha \approx 30°$ jotta saisit pisteiden A ja B välisen etäisyyden lasketuksi 2 cm tarkuudella?

Vastaus: $0.2°$

P5. Peili on paraboloidin muotoinen ja paraboloidin yhtälö on $z = ax^2 + ay^2$ missä $a > 0$. Pisteeseen $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, missä $z_0 = ax_0^2 + ay_0^2$, tulee valonsäde, jonka suuntavektori on $-\mathbf{k}$. Tämä säde heijastuu peilistä. Määritä piste, jossa heijastunut valonsäde leikkaa z-akselin (jolloin samalla osoitat, että se todella leikkaa z-akselin). Mitä siis saavutetaan paraboloidimuotisella peilillä?

Vihje: Muista, että jos valonsäde, jonka suuntavektori on $\mathbf{u}$ heijastuu tasosta, jonka normaali on $\mathbf{n}$ niin heijastuneen säteen suuntavektori on $\mathbf{v} = \mathbf{u} - 2\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}$. Laske ensin peilin normaali pisteessä (x_0, y_0, z_0), sitten heijastuneen valonsäteen suuntavektori ja sitten millä t:n arvolla suora $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ leikkaa yz-tason (eli $\mathbf{i}$-komponentti on 0) ja millä t:n arvolla se leikkaa xz-tason (eli $\mathbf{j}$-komponentti on 0).

Vastaus: $\frac{1}{4a}$