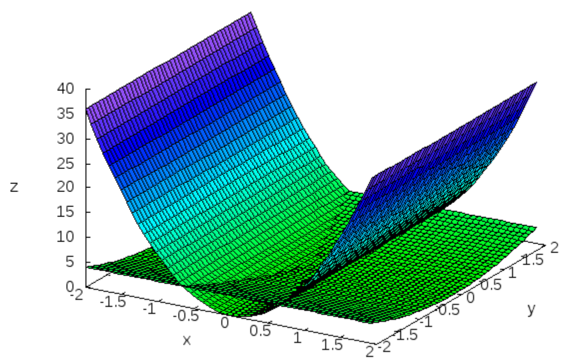
Aalto-yliopisto

MS-A0207 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (Chem) Gripenberg, Nieminen, Ojanen, Tiilikainen, Weckman
Harjoitus 1
4.1–8.1.2016, viikko 1

Palauta P-tehtävät ja vastaa S-tehtäviin viimeistään 11.1.2016 klo. 15:00.
**Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!**

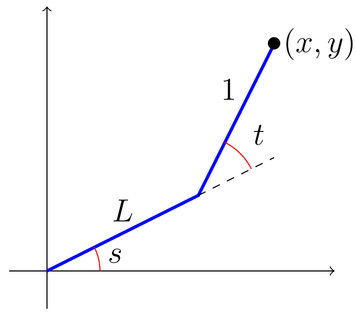
**P1.** Käyrä avaruudessa $\mathbb{R}^3$ on joukko $\{\, \mathbf{r}(t) : t \in [a,b] \,\}$ missä $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ on jatkuva funktio eli $\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ missä $x$, $y$ ja $z$ ovat jatkuvia funktioita: $[a,b] \to \mathbb{R}$ ja $-\infty < a < b < \infty$. Sanomme, että käyrä on sileä jos voimme valita $\mathbf{r}$:n siten, että funktiot $\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}}$, $\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}}$ ja $\frac{z'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}}$ ovat jatkuvia.

Lieriöt $z = 9x^2$ ja $z = y^2$, rajoitettuina joukkoon missä $-2 \le x \le 2$ ja $-2 \le y \le 2$, leikkaavat toisensa pitkin kahta sileätä käyrää. Näistä toinen kulkee pisteen $(\frac{2}{3}, -2, 4)$ kautta. Parametrisoi tämä käyrä käyttäen parametria $t = x$, eli määritä käyrälle parametriesitys muodossa $\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ missä $y(t)$ ja $z(t)$ ovat jatkuvasti derivoituvia funktioita (jolloin käyrä on sileä koska $x'(t) = 1$ ja $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \ge 1$).




**P2.** Robotin ”käsivarsi” muodostuu $L$-pituisesta ”olkavarresta” jonka toiseen päähän 1-pituinen ”kyynärvarsi” on kiinnitetty. Robotin ”käsivarsi” liikkuu ainoastaan $xy$-tasossa ja ohjataan säätämällä ”olkavarren” ja $x$-akselin välistä kulmaa $s$, ”kyynärvarren” ja ”olkavarren” välistä kulmaa $t$ sekä ”olkavarren” pituutta $L$. Esitä ”kyynärvarren” vapaan pään koordinaatit $(x, y)$ muuttujien $s$, $t$ ja $L$ funktiona. Esitä tämä funktio myös `Matlab/Octave`:n anonyymina kolmen muuttujan funktiona sekä yhden vektorimuuttujan funktiona.

*Vihje: Funktio* $f(x,y) = x^2 + y$ *voidaan esittää* `Matlab/Octave`*:n anonyymina funktiona joko kahden muuttujan funktiona muodossa* `@(x,y)x^2+y` *tai vektoriargumentilla muodossa* `@(v)v(1)^2+v(2)`




**P3.** Funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on määritelty siten, että

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x^2 < y < 2x^2,\ x > 0 \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Piirrä kuvio, jossa on joukko $\{ (x,y) : f(x,y) = 1 \}$. Piirrä "mielivaltainen" säde, esimerkiksi $y = kx$ missä $\frac{1}{2} < k < \frac{3}{4}$, jonka alkupiste on origossa ja piirrä funktion $x \mapsto f(x,kx)$ kuvaaja kun $x > 0$. Mikä on $\lim_{x\to 0+} f(x,kx)$? Olisitko saanut toisen tuloksen valitsemalla $k$ toisella tavalla? Onko raja-arvo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ olemassa?

**P4.** Onko raja-arvo $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Omega}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{xy}}$ olemassa kun

(a) $\Omega = \{ (x,y) : x > 0, y > 0 \}$?
(b) $\Omega = \{ (x,y) : x \neq 0, y \neq 0 \}$?
(c) $\Omega = \mathbb{R}^2$?

Perustele lyhyesti!

**P5.** Olkoon $f(x,y) = \frac{4}{1+y^2x^6}$, kun $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Funktio $f$ on jatkuva ja perusteluna voidaan käyttää seuraavanlaista päättelyä: *Funktiot* $y \mapsto y^2$ *ja* $x \mapsto x^6$ *ovat jatkuva ja silloin myös funktiot* $(x,y) \mapsto y^2$ *ja* $(x,y) \mapsto x^6$ *ovat jatkuvia josta taas seuraa, että funktiot* $(x,y) \mapsto y^2x^6$, $(x,y) \mapsto 1 + y^2x^6$ *ja* $(x,y) \mapsto \frac{4}{1+y^2x^6}$ *ovat jatkuvia.* Mikä on tärkein lisähuomio, jolla tätä päättelyä pitäisi täydentää?
(b) Laske $g(x) = \lim_{y\to\infty} f(x,y)$ kun $x \in \mathbb{R}$. (Tarkastele eriskeen tapaukset $x = 0$ ja $x \neq 0$). Onko $g$ jatkuva joukossa $\mathbb{R}$ (eli onko sillä merkitystä, että jokaisella $y \in \mathbb{R}$ funktio $x \mapsto f(x,y)$ on jatkuva)?
(c) Laske $h(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y)$. Onko $h$ jatkuva? Laske $\lim_{y\to\infty} h(y)$ (joka siis on sama kuin $\lim_{y\to\infty} (\lim_{x\to 0} f(x,y))$) ja vertaa tätä tulosta raja-arvoon $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} (\lim_{y\to\infty} f(x,y))$ (missä siis raja-arvot otetaan toisessa järjestyksessä).