# Mat-1.3621 Tilastollinen päättely

## 7. harjoitukset / Tehtävät

**Aiheet:** **Hypoteesien testaus**

**Avainsanat:**

1. lajin virhe, 2. lajin virhe, Harhaton testi, Hylkäysalue, Hylkäysvirhe, Hypoteesi, Hyväksymisalue, Hyväksymisvirhe, Kaksisuuntainen hypoteesi, Karlinin ja Rubinin teoreema, Kelvollinen *p*-arvo, Kriittinen alue, Merkitsevyystaso, Monotoninen uskottavuusosamäärä, Neymanin ja Pearsonin lemma, Nolla-hypoteesi, Normaalijakauma, Osamäärätestisuure, Otos, Parametri, Parametriavaruus, *p*-arvo, Perusjoukko, Päätös, Suurimman uskottavuuden estimaattori, Suurimman uskottavuuden estimointimenetelmä, Tasaisesti voimakkain testi, Testi, Testin koko, Testin taso, Testisuure, Tyhjentävyys, Uskottavuusfunktio, Uskottavuusosamäärä, Vaihtoehtoinen hypoteesi, Virheet testauksessa, Virhetodennäköisyys, Voimakkuus, Voimakkuusfunktio, Väite, Yhdistetty hypoteesi, Yksinkertainen hypoteesi, Yksisuuntainen hypoteesi

### Tehtävä 7.1.

Oletetaan, että havainnot $X_i$, $i = 1, 2, \ldots , n$ muodostavat satunnaisotoksen eksponenttijakaumasta, jonka tiheysfunktio on

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \exp[-(x-\theta)] & , x \geq \theta \\ 0 & , x < \theta \end{cases}$$

$$-\infty < \theta < +\infty$$

Johda osamäärätesti nollahypoteesille

$$\mathrm{H}_0 : \theta \leq \theta_0$$

vaihtoehtoista hypoteesia

$$\mathrm{H}_1 : \theta > \theta_0$$

vastaan. Näytä lisäksi, että testin kriittinen alue riippuu otoksesta vain tyhjentävän tunnusluvun

$$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

kautta.

### Tehtävä 7.2.

Pakkauskone täyttää laatikoita, joiden paino vaihtelee satunnaisesti jonkin verran. Täytettyjen laatikoiden keskipainon pitäisi olla 12.5 kg, mutta toisinaan pakkauskone joutuu tilaan, jossa laatikoista tulee keskimäärin liian kevyitä.

Oletetaan, että laatikon paino on satunnaismuuttuja, joka noudattaa normaalijakaumaa $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$, jossa $\sigma = 0.8$ kg. Onko laatikoiden keskipaino $\mu$ oikea vai tavoitearvoaan 12.5 kg pienempi, tutkitaan laskemalla 20 satunnaisesti valitun laatikon painojen aritmeettinen keskiarvo ja testaamalla sen avulla nollahypoteesia $\mathrm{H}_0 : \mu \geq 12.5$, kun testin merkitsevyystasoksi valitaan 0.05 ja vaihtoehtoisena hypoteesina on $\mathrm{H}_1 : \mu < 12.5$.

(a) Millä aritmeettisen keskiarvon arvoilla $H_0$ hylätään?

(b) Mikä on testin voimakkuus, jos todellisuudessa $\mu = 12.1$?

Tehtävänä on siis laskea todennäköisyys sille, että $H_0$ hylätään, kun laatikoiden keskipaino $\mu = 12.1$.

(c) Kuinka suuren otoskoon on vähintään oltava, jotta testin voimakkuus olisi vähintään 0.9, kun $\mu = 12.1$?

## Tehtävä 7.3.

Oletetaan, että havainnot $X_i$, $i = 1, 2, \ldots , n$ muodostavat satunnaisotoksen normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu,\sigma_0^2)$, jonka varianssi $\sigma_0^2$ on tunnettu ja olkoon

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

havaintojen $X_i$, $i = 1, 2, \ldots , n$ aritmeettinen keskiarvo.

(a) Olkoon nollahypoteesina

$$\mathrm{H}_{01} : \mu \leq \mu_0$$

ja vastaavana vaihtoehtoisena hypoteesina

$$\mathrm{H}_{11} : \mu > \mu_0$$

Tällöin osamäärätesti nollahypoteesille $H_{01}$ vaihtoehtoista hypoteesia $H_{11}$ vastaan on seuraavaa muotoa:

”Hylkää nollahypoteesi $H_{01}$, jos $\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > u$ ”

Jos testin merkitsevyystasoksi valitaan $\alpha$, niin kriittinen raja tai arvo

$$u = z_\alpha$$

on valittava siten, että

$$\Pr(Z \geq z_\alpha) = \alpha$$

jossa $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

(b) Olkoon nollahypoteesina

$$\mathrm{H}_{02} : \mu \geq \mu_0$$

ja vastaavana vaihtoehtoisena hypoteesina

$$\mathrm{H}_{12} : \mu < \mu_0$$

Tällöin osamäärätesti nollahypoteesille $H_{02}$ vaihtoehtoista hypoteesia $H_{12}$ vastaan on seuraavaa muotoa:

”Hylkää nollahypoteesi $H_{02}$, jos $\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} < l$ ”

Jos testin merkitsevyystasoksi valitaan $\alpha$, niin kriittinen raja tai arvo

$$l = -z_\alpha$$

on valittava siten, että

$$\Pr(Z \le -z_\alpha) = \alpha$$

jossa $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

(c) Olkoon nollahypoteesina

$$\mathrm{H}_{03} : \mu = \mu_0$$

ja vastaavana vaihtoehtoisena hypoteesina

$$\mathrm{H}_{13} : \mu \neq \mu_0$$

Tällöin osamäärätesti nollahypoteesille $\mathrm{H}_{03}$ vaihtoehtoista hypoteesia $\mathrm{H}_{13}$ vastaan on seuraavaa muotoa:

”Hylkää nollahypoteesi $\mathrm{H}_{03}$, jos $\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}} > c$

Jos testin merkitsevyystasoksi valitaan $\alpha$, niin kriittinen raja tai arvo

$$c = z_{\alpha/2}$$

on valittava niin, että

$$\Pr(Z \ge z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

jossa $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Johda kohtien (a), (b) ja (c) testien voimakkuusfunktiot ja tutki niiden ominaisuuksia.

## Tehtävä 7.4.

Olkoon testausasetelma sama kuin tehtävän 7.3. kohdassa (c).

(a) Todista, että testin koko on $\alpha$.

(b) Todista, että testi on harhaton.

## Tehtävä 7.5.

Olkoon testausasetelma sama kuin tehtävän 7.3. kohdassa (a).

(a) Todista, että testin koko on $\alpha$.

(b) Todista, että testi on harhaton.

## Tehtävä 7.6.

Oletetaan, että havainnot $X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ muodostavat satunnaisotoksen normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu,\sigma_0^2)$, jonka varianssi $\sigma_0^2$ on tunnettu ja olkoon

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

havaintojen $X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ aritmeettinen keskiarvo.

Olkoon nollahypoteesina

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$$

ja vaihtoehtoisena hypoteesina

$$\mathrm{H}_1 : \mu = \mu_1 < \mu_0$$

Osoita, että testi, jonka hylkäysalue on muotoa

$$S = \{\bar{x} < c\}$$

ja jossa kriittinen raja tai arvo $c$ määrätään niin, että

$$\Pr_{\theta_0}(\bar{X} < c) = \alpha$$

on tasaisesti voimakkain (UMP) tasoa $\alpha$ oleva testi nollahypoteesille $\mathrm{H}_0$ vaihtoehtoista hypoteesia $\mathrm{H}_1$ vastaan.

## Tehtävä 7.7.

Oletetaan, että havainnot $X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ muodostavat satunnaisotoksen normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu, \sigma_0^2)$, jonka varianssi $\sigma_0^2$ on tunnettu ja olkoon

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

havaintojen $X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ aritmeettinen keskiarvo.

Olkoon nollahypoteesina

$$\mathrm{H}_0 : \mu \geq \mu_0$$

ja vaihtoehtoisena hypoteesina

$$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$$

Osoita, että testi, jonka hylkäysalue on muotoa

$$S = \left\{ \bar{x} < \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right\}$$

jossa $-z_\alpha$ on valittava siten, että

$$\Pr(Z < -z_\alpha) = \alpha$$

kun

$$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$$

on tasaisesti voimakkain (UMP) tasoa $\alpha$ oleva testi nollahypoteesille $\mathrm{H}_0$ vaihtoehtoista hypoteesia $\mathrm{H}_1$ vastaan.

## Tehtävä 7.8.

Oletetaan, että havainnot $X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ muodostavat satunnaisotoksen normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu, \sigma_0^2)$, jonka varianssi $\sigma_0^2$ on tunnettu ja olkoon

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

havaintojen $X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ aritmeettinen keskiarvo.

Olkoon nollahypoteesina

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$$

ja vaihtoehtoisena hypoteesina

$$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$$

Osoita, että tasaisesti voimakkainta (UMP) tasoa $\alpha$ olevaa testiä nollahypoteesille $\mathrm{H}_0$ vaihtoehtoista hypoteesia $\mathrm{H}_1$ vastaan ei olemassa.

## Tehtävä 7.9.

Oletetaan, että havainnot $X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ muodostavat satunnaisotoksen normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ ja olkoon

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

havaintojen $X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ aritmeettinen keskiarvo ja

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

niiden otosvarianssi.

Olkoon nollahypoteesina

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$$

ja vaihtoehtoisena hypoteesina

$$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$$

Osamäärätesti hylkää nollahypoteesin $\mathrm{H}_0$ suurille satunnaismuuttujan

$$W(\mathbf{X}) = \frac{|\bar{X} - \mu|}{S/\sqrt{n}}$$

arvoille. Määrää testin $p$-arvo.

## Tehtävä 7.10.

Oletetaan, että havainnot $X_i$, $i = 1, 2, \dots , n$ muodostavat satunnaisotoksen normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ ja olkoon

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

havaintojen $X_i$, $i = 1, 2, \dots , n$ aritmeettinen keskiarvo ja

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

niiden otosvarianssi.

Olkoon nollahypoteesina

$$\mathrm{H}_0 : \mu \le \mu_0$$

ja vaihtoehtoisena hypoteesina

$$\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$$

Osamäärätesti hylkää nollahypoteesin $\mathrm{H}_0$ suurille satunnaismuuttujan

$$W(\mathbf{X}) = \frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

arvoille. Määrää testin $p$-arvo.