

**Mat-1.3621 Tilastollinen päättely****5. harjoitukset / Tehtävät****Aiheet: Piste-estimointi****Avainsanat:**

Asymptoottinen normaalisuus, Bernoulli-jakauma, Bijektio, Eksponenttijakauma, Estimaattori, Estimaatti, Estimointi, Harhattomuus, Havainto, Havaintopiste, Logaritminen uskottavuusfunktio, Maksimointi, Momenttiestimaattori, Momenttimenetelmä, Normaalijakauma, Normaalisuus, Otos, Otostunnusluku, Parametri, Pienimmän neliösumman menetelmä, Pistetodennäköisyysfunktio, Riippumattomuus, Suurimman uskottavuuden estimaattori, Suurimman uskottavuuden menetelmä, Tarkentuvuus, Tehokkuus, Tiheysfunktio, Tyhjentyvyys, Uskottavuusfunktio, Yhteisjakauma

**Tehtävä 5.1.**

Olkoon

$$y_i = \mu + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$$

jossa  $\mu$  on vakio ja

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \perp$$

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n$$

Todista, että

$$y_1, y_2, \dots, y_n \perp$$

$$y_i \sim N(\mu, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n$$

ja johda parametrin  $\mu$  *pienimmän neliösumman estimaattori*.**Tehtävä 5.2.**Olkoon satunnaismuuttujan  $X$  tiheysfunktio

$$f(x) = (1 + \theta)x^\theta, 0 < x < 1$$

Kysymys: Miksi parametrin  $\theta$  pitää toteuttaa ehto  $\theta > -1$ ?Oletetaan, että satunnaismuuttujasta  $X$  on saatu havainnot

$$0.5, 0.3, 0.1, 0.1, 0.2$$

- Hahmottele tiheysfunktion kuvaaja parametrin  $\theta$  arvoilla  $-0.5, 0, 1, 2$  ja arvioi mikä arvoista sopii havaintoihin parhaiten.
- Estimoi parametri  $\theta$  *momenttimenetelmällä*.
- Estimoi parametri  $\theta$  *suurimman uskottavuuden menetelmällä*.
- Vertaa parametrin  $\theta$  momenttiestimaattoria ja suurimman uskottavuuden estimaattoria toisiinsa.

**Tehtävä 5.3.**

Olkoon

$$y_i = \mu + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$$

jossa  $\mu$  on vakio ja

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \perp$$

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n$$

Olkoon

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

havaintojen  $y_i, i = 1, 2, \dots, n$  aritmeettinen keskiarvo ja tarkastellaan muotoa  $c\bar{y}$  olevia estimaattoreita parametrille  $\mu$ , jossa  $c$  on vakio.

Johda estimaattorin  $c\bar{y}$  keskineliövirhe ja minimoi keskineliövirhe muuttujan  $c$  suhteen.

**Tehtävä 5.4.**

Johda *Bernoulli-jakauman* Bernoulli( $p$ ) odotusarvoparametrille  $p$  estimaattori *momenttimenetelmällä*.

**Tehtävä 5.5.**

Johda *Bernoulli-jakauman* Bernoulli( $p$ ) odotusarvoparametrille  $p$  estimaattori *suurimman uskottavuuden menetelmällä*.

**Tehtävä 5.6.**

Määritellään *eksponenttijakauman* tiheysfunktio kaavalla.

$$f(x; \lambda) = \lambda \exp(-\lambda x), \lambda > 0, x \geq 0$$

Johda parametrille  $\lambda$  estimaattori *suurimman uskottavuuden menetelmällä*.

**Tehtävä 5.7.**

Määritellään *eksponenttijakauman* tiheysfunktio kaavalla.

$$f(x; \mu) = \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{1}{\mu} x\right), \mu > 0, x \geq 0$$

Johda parametrille  $\mu$  estimaattori *suurimman uskottavuuden menetelmällä*.