Mat-5.3740 Kontinuumimekaniikka **Lyly / Hannukainen**
Harjoitus 8, 21.11.2007 14-16 U322

Huomaa, että harjoitusten ja luentojen ajat on vaihdettu

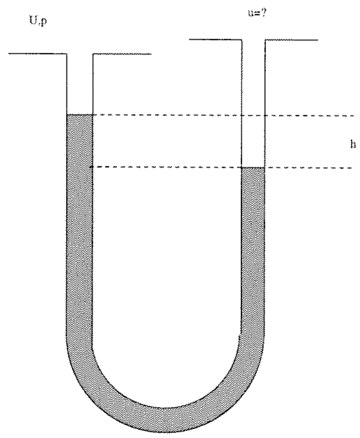
Tehtävä 1 on palautettava kotitehtävä. Palauta vastaus laskuharjoituksiin tai huoneen Y323b edessä olevaan lokeroon viimeistään maanantaina 26.11.2007 klo. 9:00.

1. Todista Kelvinin lause ilman tehtävän 5. tulosta. Vihje : todista ensin, että pyörteisyys

$$\int_{\Gamma_t} u \cdot n \, d\ell$$

säilyy vakiona jokaiselle polulle Γ_t.

2. (Venturi device) Tarkastellaan allaolevan kuvan mukaista tilannetta. Ohuen putken päät asetetaan ideaalisen nesteen pyörteettömään, ajastariippumattomaan virtaukseen. Putken alkupään kohdalla neste virtaa nopeudella U ja paine on P. Tiedetään, että putkeen sijoitetun nestepatsaan korkeuserto on h. Laske nopeus $|u|$ sekä paine p putken loppupäässä.



3. Ideaalineste pyörii ämpärissä kulmanopeudella ω. Olkoot g nesteeseen vaikuttava gravitaatio. Määritä nesteen vapaan pinnan muoto. Millaisen pinnanmuodon Bernoullin lauseen soveltaimen antaisi ?

4. Mallinnetaan tornadoa ns. Rakine vortex -mallilla, eli

$$u_\theta = \begin{cases} \omega r, & r < a \\ \frac{\omega a^2}{r}, & r > a \end{cases} \qquad u_r = u_z = 0.$$

Piirrä nopeuskenttä. Laske nopeuskenttää vastaava paine p ja päättele tämän avulla, että tornadon silmässä hyvin pieni paine. (vertaa painetta $r = \infty$ ja $r = 0$).

5. Käy läpi Kelvinin lauseen todistuksessa tarvittavan tarvittavan kaavan

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} \omega \cdot n \, d\Gamma = \int_{\Sigma_t} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathrm{curl}(\omega \times u) \right) \cdot n \, d\Gamma$$

johto. Huomaa, että voit todistaa Kelvinin lauseen ilman ylläolevaa yhtälöä.

Mat-5.3740 Kontinuumimekaniikka **Lyly / Hannukainen**
Mallit / Harjoitus 8

1. Todistetaan ensin, että

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{C(t)} \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{x} = 0.$$

Oletetaan tätä varten, että polku $C(t)$ voidaan parametrisoida muodossa $\boldsymbol{x}(s,t),\ s\in[0,1]$ sekä riittävä sileys polulta C. Näin saadaan

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{C(t)} \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{x} = \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(s,t),t)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial s}\right) ds$$

Koska polku liikkuu ajan mukana, voidaan $\boldsymbol{x}$ kirjoittaa liikkeen avulla, $\boldsymbol{x}(s,t) = \Phi(\boldsymbol{x}_0(s),t)$, jossa x_0 on polku ajanhetkellä $t=0$. Lasketaan derivaatat :

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0(s),t) = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t} = \boldsymbol{u}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(s,t),t) = \nabla\boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}$$

Näin saadaan,

$$\int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(s,t),t)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial s} ds = \int\limits_0^1 \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial s} + \boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} ds.$$

Koska $\frac{\partial}{\partial s}\|\boldsymbol{u}\|^2 = 2\boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s}$ voidaan jälkimmäinen termi integroida tarkasti. Koska $C(t)$ on suljettu polku, tämä antaa

$$\int\limits_0^1 \boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} ds = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\|\boldsymbol{u}\|^2 ds = 0.$$

Saadaan siis,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{C(t)} \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{x} = \int\limits_{C(t)} \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}\cdot d\boldsymbol{x}$$

Oletusten mukaan (ideaali, kokoonpuristumaton, vakio tiheys, potentiaalikenttä) pätee $\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \nabla\left(\frac{p}{\rho}+V\right)$, eli

$$\int\limits_{C(t)} \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}\cdot d\boldsymbol{x} = \int\limits_{C(t)} -\nabla\left(\frac{p}{\rho}+V\right) d\boldsymbol{x} = 0$$

koska $C(t)$ on suljettu polku (suljettu viivaintegraali konservatiivisessa vektorikentässä on nolla). Stokesin lauseella saadaan suoraan

$$\int\limits_{\Sigma(t)} \nabla\times\boldsymbol{u}\cdot dS = \int\limits_{\partial\Sigma(t)} \boldsymbol{u}\cdot d\ell = \text{vakio}.$$

2. Koska tarkasteltava putki on ohut, voidaan olettaa, että putkessa ei ole virtausta, eli putkessa $\boldsymbol{u} = 0$. Näinollen putken päiden välillä on nestepatsaan korkeuteen verrannollinen paine-ero $\rho g h$. Tästä saadaan suoraan $p = P + \rho g h$.

   Tarkasteltava neste on ideaalista ja virtaus oletetaan ajastariippumattomaksi sekä pyörteettömäksi (Esimerkiksi virtaus lentokoneen siiven keskikohdalla, riittävän pienellä siiven kulmalla täyttää asetetut ehdot). Näinollen pätee $\mathcal{H} =$ vakio koko nesteessä, eli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2 = \text{vakio koko nesteessä}$$

   (gravitaation vaikutus on koko nesteessa sama, jote se voidaan jättä huomioimatta). Saadaan yhtälö putken alku ja loppupäiden nopeuksille

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2 &= \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{U}\|^2 \\ \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2 &= -gh + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{U}\|^2 \\ \|\boldsymbol{u}\| &= \sqrt{\|\boldsymbol{U}\|^2 - 2gh} \end{aligned}$$

3. Kulmanopeus on vektorimuodossa $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$. Nopeusvektori karteesisessa koordinaatistossa on siis

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x} = \omega \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{x} = [-\omega y, \omega x, 0]^T$$

   Koska virtaus on ajasta riippumaton, saadaan $\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = [-\omega^2 y, -\omega^2 x, 0]^T$. Eulerin yhtälö antaa

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + gz\right)$$

   eli

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\omega^2 x \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho\omega^2 y \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

   Ratkaisuna on siis

$$p = -\rho g z + \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + C$$

   jossa C on mielivaltainen vakio. Koska vapaa pinta on samassa paineessa ilmakehän kanssa, on vapaassa pinnassa oltava

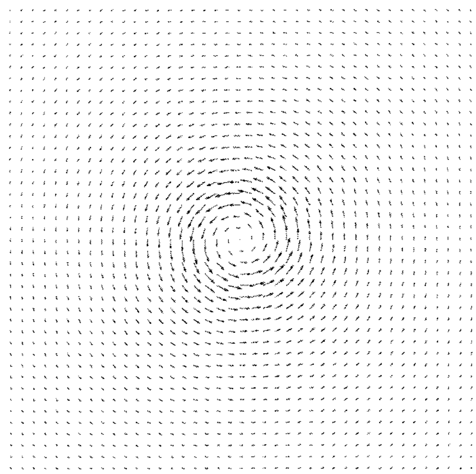
$$p = p_0 = \text{ilmakehän paine}$$

   Tästä voidaan ratkaista vapaan pinnan korkeus

$$z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + C$$

   Bernoullin teoriaa ei voi soveltaa, koska virtaus ei ole pyörteetön. Virheellinen sovellus antaa väärän tuloksen, $z = C - \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2)$.

4. Mallin antama nopeuskenttä näyttää tornadolta



Lasketaan nopeuskenttää vastaava paine. Ensin muutama kaava sylinterikoordinaatistossa. Nabla on sylinterikoordinaatistossa muotoa

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

Joten $\boldsymbol{u}\cdot\nabla$ saa muodon

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla = u_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + u_z\frac{\partial}{\partial z}$$

Roottori on sylinterikoordinaatistossa muotoa

$$\nabla\times F = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial r} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}$$

Koska sylinterikoordinaatiston yksikkövektorit riippuvat koordinaateista niiden derivaatat eivät ole nollia. Erityisesti

$$\boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}$$

joten

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta = -\cos\theta\boldsymbol{i} - \sin\theta\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{e}_r$$

Alue $r < a$

Alueessa $r < a$ virtaus ei ole pyörteetön, joten sovelletaan Eulerin yhtälöä (edellinen tehtävä olisi voitu laskea näin)

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + gz\right)$$

joka saa muodon

$$-\rho\omega^2 r\boldsymbol{e}_r = -\frac{\partial p}{\partial r}\boldsymbol{e}_r - \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g\right)\boldsymbol{e}_z - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

eli saadaan yhtälöt

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r \quad \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0 \quad \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

joiden ratkaisuna on $p = \rho\omega^2 r^2/2 - \rho g z + c_1$.

Alue $r < a$

Alueessa $r > a$ saadaan sylinterikoordintaatiston roottorin kaavaa soveltamalla $\nabla \times \boldsymbol{u} = 0$. Kyseessä on siis pyörteetön virtaus ja voimme soveltaa Bernoullin Lausetta, eli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2 + gz = \text{vakio kaikkialla nesteessä.} = c_2$$

Tästä saadaa ratkaistua paine

$$p = -\rho\frac{\omega^2 a^4}{2r^2} - \rho g z + c_2.$$

Koska paineen tulee olla jatkuva (TM luku 7 p.108) $c_2 - c_1 = 0$, eli $c_2 = c_1 + \omega^2 a^2$. Kun $r \rightarrow \infty$, $p \rightarrow -\rho g z + c_2$. Pyörteen keskellä on paine $p \rightarrow -\rho g z + c_1$. Näinollen pyörteen keskellä oleva paine on $\omega^2 a^2$ pienempi, kuin "normaalipaine".

5) 1. tehtävän nojalla

$$\frac{d}{dt}\int_{\Sigma(t)} \nabla\times u \, dS = \int_{\partial\Sigma(t)} \frac{Du}{Dt}\cdot dl$$

Stokesin lauseella saadaan:

$$\int_{\partial\Sigma(t)} \frac{Du}{Dt}\cdot dl = \int_{\Sigma(t)} \nabla\times\frac{Du}{Dt}\cdot dS$$

lasketaan mitä $\nabla\times\frac{Du}{Dt}$ on:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u$$

$$\nabla\times\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\nabla\times u)}{\partial t} = \frac{\partial\omega}{\partial t}, \quad \omega = \text{pyörteisyys}$$

$$\nabla\times(u\cdot\nabla)u = ?$$

Käytetään kirjan kaavaa (p. 104):

$$(u\cdot\nabla)u = \nabla\frac{|u|^2}{2} + (\nabla\times u)\times u$$

Tod:

$$\nabla\frac{|u|^2}{2} = \frac{1}{2}\nabla\left(u_1^2+u_2^2+u_3^2\right) = u_l u_{l,i}$$

$$(\nabla\times u)\times u = \varepsilon_{nim}(\varepsilon_{ijk}u_{k,j})(u_m)$$

$$= \varepsilon_{nim}\varepsilon_{ijk}u_{k,j}u_m$$

$$\delta_{jm}\delta_{kn}u_{k,j}u_m - \delta_{jn}\delta_{km}u_{k,j}u_m$$

$$= u_{n,m}u_m - u_{k,n}u_k$$

Tod:

eli $u_l \cancel{u_{l,i}} + u_{i,m} u_m - \cancel{u_{k,i} u_k}$

$= u_{i,m} u_m = (u \cdot \nabla) u$ ok ∇

Joten $\nabla \times (u \cdot \nabla) u = \nabla \times (\omega \times u)$

Tästä saadaan siis:

$$\nabla \times \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times (\omega \times u)$$

Joten

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma(t)} \nabla \times u \cdot dS = \int_{\Sigma(t)} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times (\omega \times u) \cdot dS \quad \square$$