1.

$$\begin{cases} y' = Ay + g \\ y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 9 & -5 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \\ y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

9AV

SIVUN ALALAIDASSA YKSITYISKOHTIA

$$y(t) = E(t)y_0 + \int_0^t E(t-s)g(s)\,ds \qquad E(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} (1+3t) & -t \\ 9t & (1-3t) \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$$\Rightarrow y(t) = \begin{bmatrix} (1+3t) & -t \\ 9t & (1-3t) \end{bmatrix} e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1+3(t-s) & -(t-s) \\ 9(t-s) & 1-3(t-s) \end{bmatrix} e^{-2(t-s)} \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} ds$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4t \\ -1+12t \end{bmatrix} e^{-2t} + \int_0^t \begin{bmatrix} -3s^2 + (3t+2)s - t \\ -9s^2 + (9t+3)s + 1 - 3t \end{bmatrix} e^{-2(t-s)}\,ds$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4t \\ -1+12t \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} \int_0^t [-3s^2 + (3t+2)s - t]\, e^{-2t} e^{2s}\,ds \\ \int_0^t [-9s^2 + (9t+3)s + 1 - 3t]\, e^{-2t} e^{2s}\,ds \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4t \\ -1+12t \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} -3\int_0^t s^2 e^{2s}\,ds + (3t+2)\int_0^t s e^{2s}\,ds - t\int_0^t e^{2s}\,ds \\ -9\int_0^t s^2 e^{2s}\,ds + (9t+3)\int_0 e^{2s} s\,ds + (1-3t)\int_0^t e^{2s}\,ds \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$$\int_0^t s^2 e^{2s}\,ds = \tfrac{1}{2}t^2 e^{2t} - \tfrac{1}{2} t e^{2t} + \tfrac{1}{4} e^{2t} - \tfrac{1}{4}$$

$$\int_0^t s e^{2s}\,ds = \tfrac{1}{2} t e^{2t} - \tfrac{1}{4} e^{2t} + \tfrac{1}{4}$$

$$\int_0^t e^{2s}\,ds = \tfrac{1}{2} e^{2t} - \tfrac{1}{2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4t \\ -1+12t \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} \frac{5}{4}t - \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}t + \frac{5}{4}\right)e^{-2t} \\ \frac{9}{4}t - \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2} + \frac{15}{4}t\right)e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5t - 5 \\ 9t - 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 21t + 9 \\ 63t + 6 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

E(t):n laskeminen:

Homogeenisen yhtälön ratkaisu $y_H(t) = c_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t}}_{= y_1(t)} + c_2 \underbrace{\begin{bmatrix} t \\ 3t-1 \end{bmatrix} e^{-2t}}_{= y_2(t)}$ (9LV 3)

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 3 & 3t-1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$$E(t) = Y(t)Y(0)^{-1} = Y(t)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 3 & 3t-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1+3t & -t \\ 9t & 1-3t \end{bmatrix}$$

(2.) $\bar{y}' = A\bar{y}$ jos $\bar{0}$ on satulapiste $\Rightarrow$ ominaisarvot ovat reaaliset ja erimerkkiset

Olkoon λ_1 ja λ_2 A:n ominaisarvot s.e. $\lambda_1 > 0$ ja $\lambda_2 < 0$ tällöin

$$A = VDV^{-1} = V\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} V^{-1}$$

a) Systeemin $\bar{y}' = A^2\bar{y}$ ominaisarvot:

Jos $Av_1 = \lambda_1 v_1$, niin $A^2 v_1 = A\underbrace{Av_1}_{=\lambda_1 v_1} = \lambda_1 \underbrace{Av_1}_{=\lambda_1 v_1} = \lambda_1^2 v_1$. Vastaavasti jos $Av_2 = \lambda_2 v_2$, niin $A^2 v_2 = \lambda_2^2 v_2$.

$\Rightarrow$ ominaisarvot λ_1^2 ja λ_2^2, jotka ovat molemmat suurempia kuin nolla.

Siis systeemin $\bar{y}' = A^2\bar{y}$ kriittinen p. on tyyppiä <u>lähde</u> (epästabiili)

b) systeemin $\bar{y}' = A^3\bar{y}$ om. arvot vastaavasti

$A^3 v_1 = \lambda_1^3 v_1$
$A^3 v_2 = \lambda_2^3 v_2$
$\Rightarrow$ om. arvot "säilyttävät" merkkinsä $\lambda_1^3 > 0$ ja $\lambda_2^3 < 0$

Siis systeemin $\bar{y}' = A^3\bar{y}$ kr. piste on tyyppiä <u>satula</u>

(3.)

$$\begin{cases} x' = 200x - 4xy = f(x,y) \\ y' = -150y + 2xy = g(x,y) \end{cases}$$

kriittiset pisteet:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(200-4y) = 0 \\ y(2x-150) = 0 \end{cases}$$

kun $x = 0$ ja $y = 0 \Leftrightarrow (0,0)$
tai $x = 75$ ja $y = 50 \Leftrightarrow (75, 50)$

linearisointi:

$$A = J_F(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200-4y & -4x \\ 2y & 2x-150 \end{bmatrix}_{(x,y)=(a,b)}$$

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$ missä $u = x - a$ ja $v = y - b$

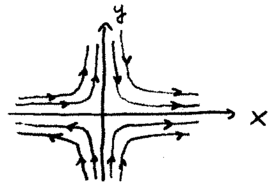
3. jatkuu

piste (0,0) ominaisarvot

$$A = J_F(0,0) = \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & -150 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 200 > 0 \qquad \lambda_2 = -150 < 0$$

ratk. $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = c_1 \bar{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \bar{v}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \bar{v}_1 e^{200t} + c_2 \bar{v}_2 e^{-150t}$

systeemi on tyyppiä <u>satula</u>
pisteen (0,0) ympäristössä



piste (75, 50)

ominaisarvot

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -300 \\ 100 & 0 \end{bmatrix}$$

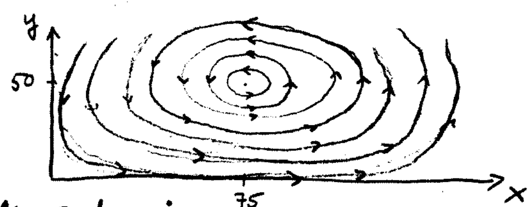
$\lambda^2 + 30000 = 0 \iff \lambda = \pm\sqrt{-30000} = \pm i \cdot 100 \cdot \sqrt{3}$

$\lambda_1 = i \cdot 100 \cdot \sqrt{3} \qquad \lambda_2 = -i\, 100 \cdot \sqrt{3}$

ratk.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = c_1 \bar{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \bar{v}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{i}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} e^{i \cdot 100\sqrt{3}} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{i}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} e^{-i\,100 \cdot \sqrt{3}}$$

Linearisoitu
systeemi tyyppiä <u>keskus</u>
pisteen (75, 50) ympäristössä



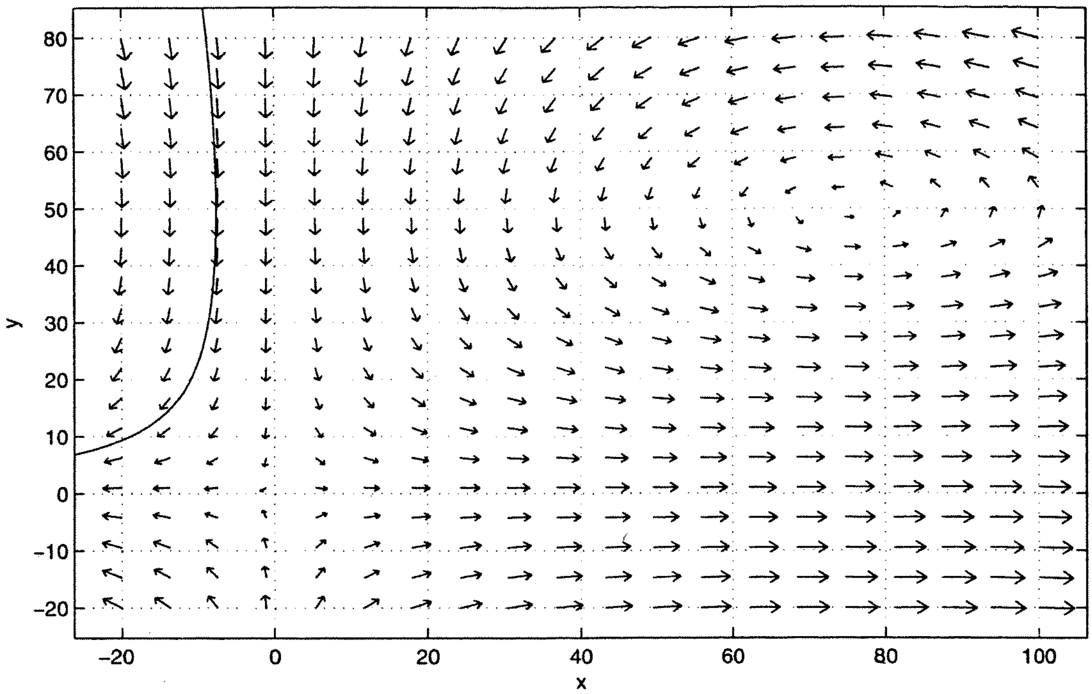
(Tämä ei kerro, onko alkuperäinen epälineaarinen systeemi pisteen (75, 50) ympäristössä keskus, stabiili spiraali (= nieluspiraali) vai epästabiili spiraali (= lähdespiraali).)

pplane7:lla piirretty kuva liitteenä

tehtävä 3

$x' = 200x - 4xy$
$y' = -150y + 2xy$

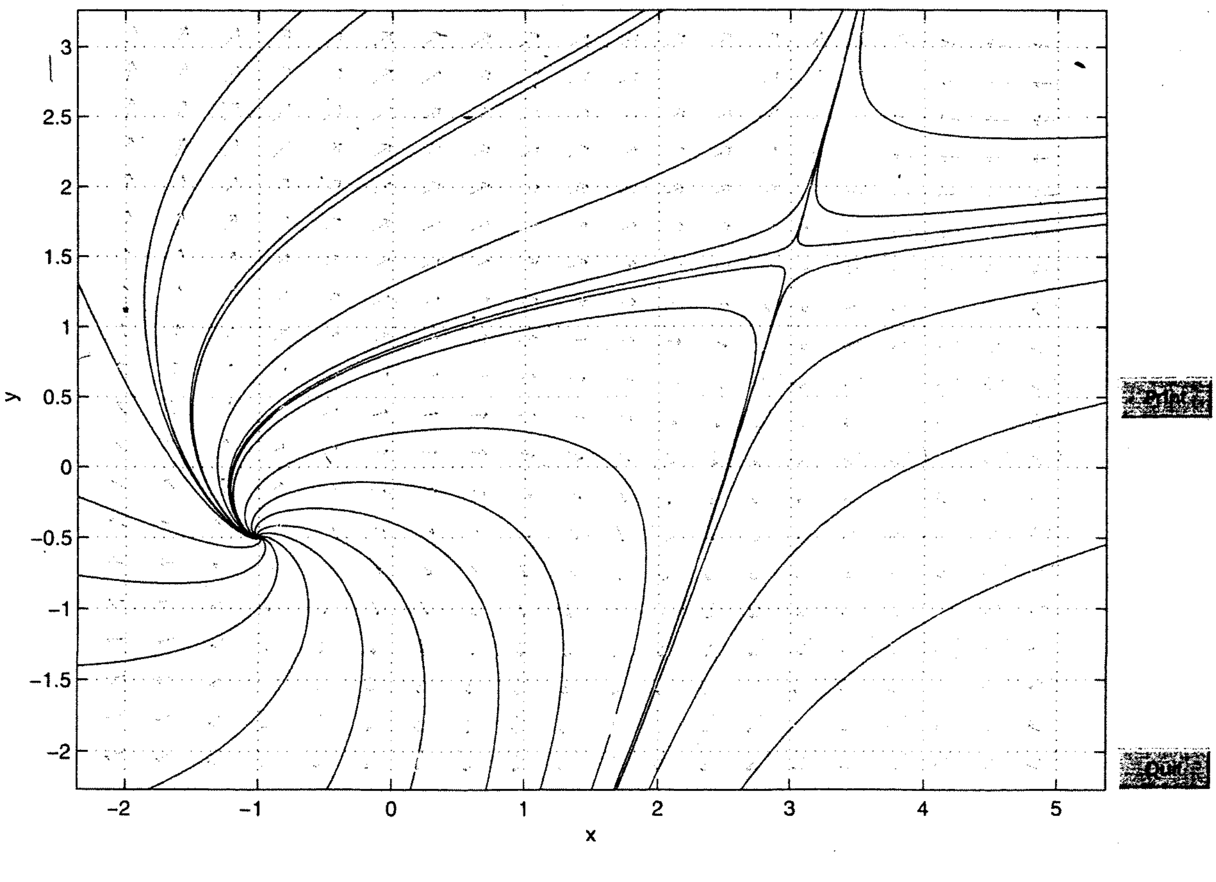
piirretty pplane7:lla



tehtävä 4.

$x' = x - x^2 + 2y + 3$
$y' = -x + 2y$

piirretty pplane7:lla



4.
$$\begin{cases} x' = x - x^2 + 2y + 3 = f(x,y) \\ y' = -x + 2y = g(x,y) \end{cases}$$

kriittiset pisteet:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}[x^2 - x - 3] \\ y = \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$x = x^2 - x - 3$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2} = 1 \pm 2$$

$x_1 = 3$, $y_1 = \frac{3}{2}$, $(3, \frac{3}{2})$

$x_2 = -1$, $y_2 = -\frac{1}{2}$, $(-1, -\frac{1}{2})$

linearisointi:

$$J_F(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2x & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{(x,y)=(a,b)}$$

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = J_F(a,b) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$ missä $u = x - a$ ja $v = y - b$

piste $(3, \frac{3}{2})$

$$J_F(3, \tfrac{3}{2}) = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja -vektorit

$$(-5-\lambda)(2-\lambda) + 2 = 0$$
$$\lambda^2 + 3\lambda - 8 = 0$$
$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot(-8)}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{41}$$

$\lambda_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}$ (>0)

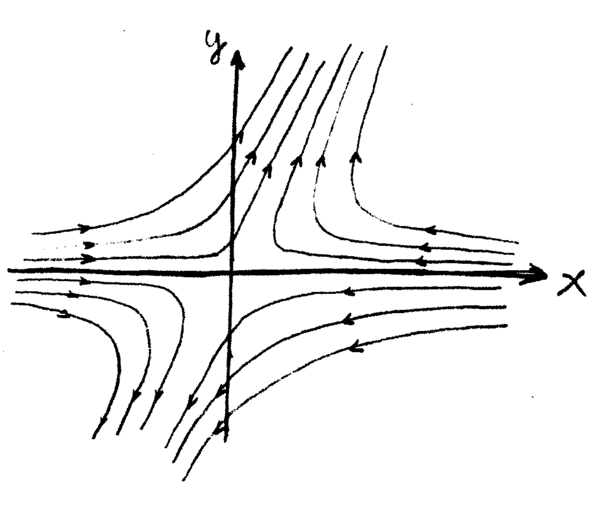
$\lambda_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}$ (<0)

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2} = 1.702\ldots \qquad \lambda_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2} = -4.702\ldots$$

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 7+\sqrt{41} \end{bmatrix} \qquad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 7-\sqrt{41} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = c_1 \bar{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \bar{v}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 7+\sqrt{41} \end{bmatrix} e^{\frac{1}{2}(-3+\sqrt{41})t} + c_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 7-\sqrt{41} \end{bmatrix} e^{\frac{1}{2}(-3-\sqrt{41})t}$$

pisteen $(3, \frac{3}{2})$ läheisyydessä systeemi on tyyppiä <u>satula</u>



4. jatkuu

piste $(-1, -\frac{1}{2})$

$$J_F(-1, -\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

om. arvot ja -vektorit

$$(3-\lambda)(2-\lambda) + 2 = 0$$
$$6 - 5\lambda + \lambda^2 + 2 = 0$$
$$\lambda^2 - 5\lambda + 8 = 0$$

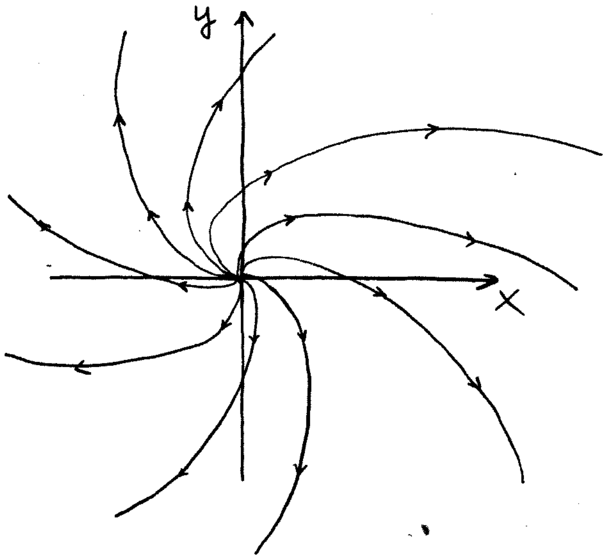
$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{5 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} = \qquad \lambda_2 = \frac{5}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

om. arvot kompleksiset
ja $Re\{\lambda_i\} > 0$ $\Rightarrow$

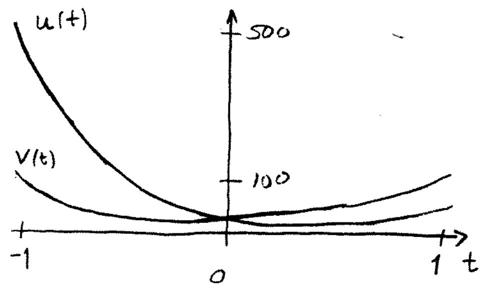
$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1-\sqrt{7}i \end{bmatrix} \qquad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1+\sqrt{7}i \end{bmatrix}$$

pisteen $(-1, -\frac{1}{2})$ ympäristössä
systeemi on tyyppiä
epästabiili spiraali (=lähdespiraali)



$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1-\sqrt{7}i \end{bmatrix} e^{\frac{1}{2}(5+i\sqrt{7})t} + c_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1+\sqrt{7}i \end{bmatrix} e^{\frac{1}{2}(5-i\sqrt{7})t}$$

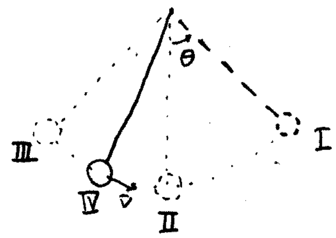
$c_1 = c_2 = 1$



pplane7:lla piirretty kuva liitteenä

5. a) Umpinaisella trajektorilla tarkoitetaan ns. normaalia heiluriliikettä, jossa paikka θ ja nopeus ω vaihtelevat minimi- ja maksimiarvojensa välissä. (ks. kuva alla)

pisteestä I lähtevällä heilurilla $\theta_0 \simeq 2$ ja $\omega_0 = 0$ liikkeen suunta on aluksi vasemmalle ja nopeus kasvaa kunnes saavuttaa maksiminsa kun paikkakoordinaatti $\theta = 0$ (piste II) tämän jälkeen nopeus alkaa taas pienentyä ja pienenee nollaa saavuttaessa pisteeseen III viereinen kuva havainnollistaa tilannetta



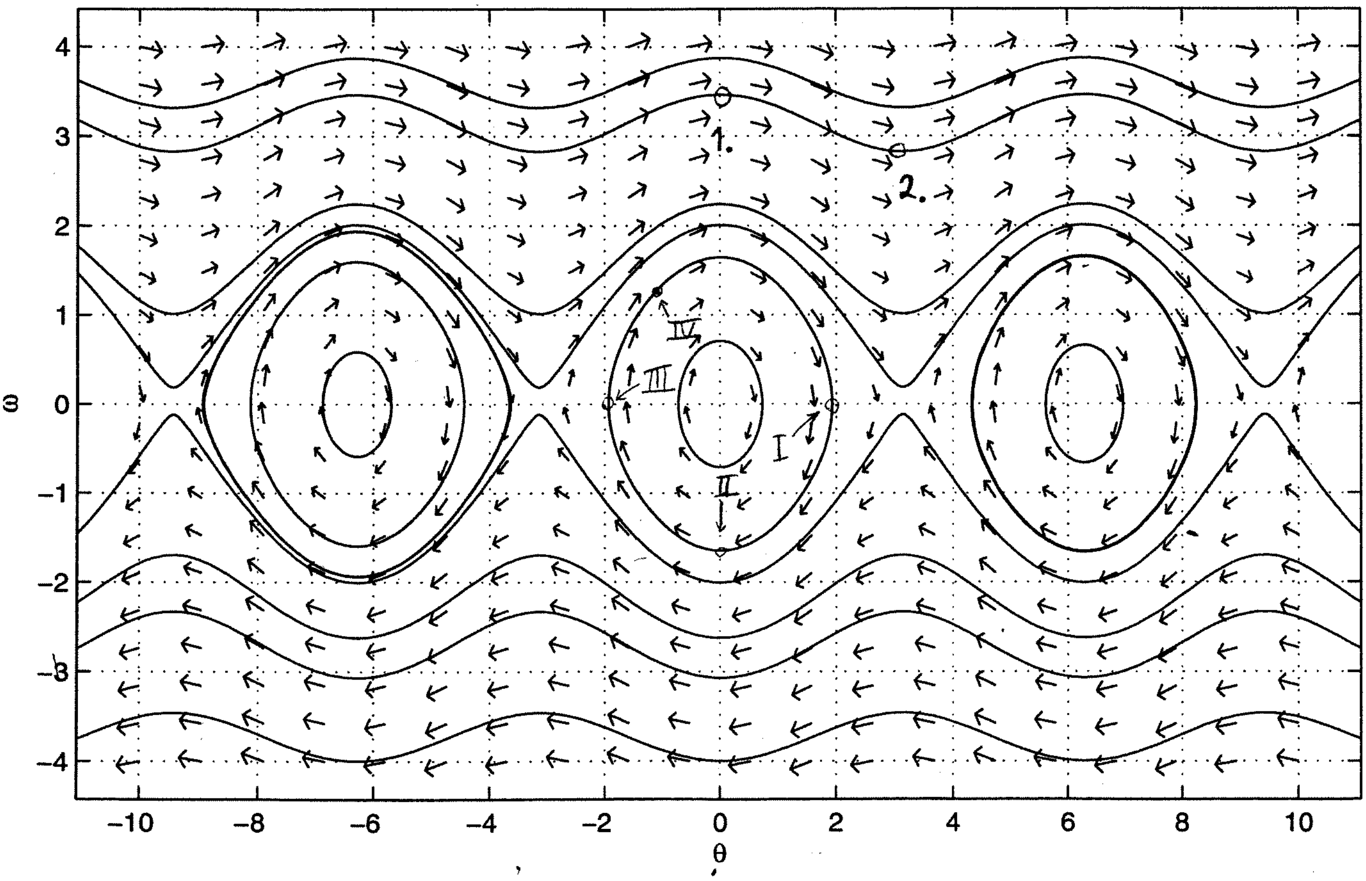
rajatapaus eli pisteen $(\pi, 0)$ kautta kulkeva trajektori tarkoittaa heiluria, joka pysähtyy yläasentoon.

b) Aaltoileva eli ei-umpinainen trajektori tarkoittaa "ympyrää pyörivää" heiluria. Sen kulmanopeuden (ω) merkki ei koskaan muutu ts. liike jatkuu samaan suuntaan vain välillä hidastumalla. Seuraamalla erästä aaltoa pisteestä 1. pisteeseen 2. (väli $[0, \pi]$) voidaan nopeudeksi pisteessä $\theta = 0$ lukea n. 3,4 ja pisteessä $\theta = \pi$ n. 2,8

Paikkakoordinaatti θ ei pysy tietyllä välillä, vaan kasvaa kasvamistaan: se laskee myös heilurin kokonaiset kierrokset, jotka tuovat kukin θ:aan 2π:in lisäyksen.

$\theta' = \omega$ $\qquad\qquad$ $D = 0$

$\omega' = -\sin(\theta) - D\,\omega$



(6.)

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 \end{cases} \qquad f_1(t, \bar{y}) = -y_1 + y_2$$

$$f_2(t, \bar{y}) = -y_1 - y_2$$

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + h \cdot \bar{f}(t_n, \bar{y}_n)$$

$$\bar{y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_0 + 0{,}2 \cdot \bar{f}(t_0, \bar{y}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} + 0{,}2 \cdot \begin{bmatrix} 0+4 \\ 0-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 3{,}2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_2 = \bar{y}_1 + 0{,}2 \cdot \bar{f}(t_1, \bar{y}_1) = \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 3{,}2 \end{bmatrix} + 0{,}2 \begin{bmatrix} -0{,}8+3{,}2 \\ -0{,}8-3{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}28 \\ 2{,}4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_3 = \dots = \begin{bmatrix} 1{,}28 \\ 2{,}4 \end{bmatrix} + 0{,}2 \begin{bmatrix} -1{,}28+2{,}4 \\ -1{,}28-2{,}4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}504 \\ 1{,}664 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_4 = \dots = \begin{bmatrix} 1{,}504 \\ 1{,}664 \end{bmatrix} + 0{,}2 \begin{bmatrix} -1{,}504+1{,}664 \\ -1{,}504-1{,}664 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}536 \\ 1{,}0304 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_5 = \dots = \begin{bmatrix} 1{,}536 \\ 1{,}0304 \end{bmatrix} + 0{,}2 \cdot \begin{bmatrix} -1{,}536+1{,}0304 \\ -1{,}536-1{,}0304 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}4349 \\ 0{,}5171 \end{bmatrix}.$$

Tarkka ratkaisu on (kun $A(\mathbf{u}+i\mathbf{v}) = (a+ib)(\mathbf{u}+i\mathbf{v})$ ja $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, a ja b ovat reaalisia)

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{bmatrix} e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{y}(0) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \\
&= 4e^{-1} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Matlab-koodi numeerisen ratkaisun laskemiseksi ja kuvan piirtämiseksi:

```
A = [-1 1; -1 -1];
y = [0 4]';
ylist = y;
for j = 1 : 5
  y = y + 0.2 * A * y; ylist = [ylist y];
end
ylist

t = [0 : .01 : 1.3];
ytarkka = 4*[exp(-t).*sin(t); exp(-t).*cos(t)];
plot(ylist(1, :), ylist(2, :), 'ro-', ytarkka(1, :), ytarkka(2, :), 'k')
```