LV8

KP3

1.

$\lambda_1 = 3 \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 1/3 \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x_{k+1} = A x_k \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}$

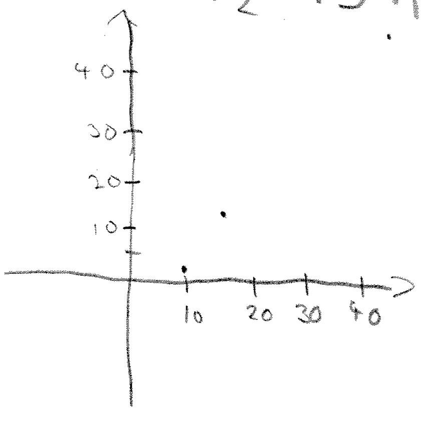
a)

$$x_0 = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 v_1 - 4 v_2$$

OM. ARVOT SKAALAA OM. VEKTOREITA

$$\Rightarrow x_1 = 15 v_1 - \tfrac{4}{3} v_2 = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16\,1/3 \\ 13\,2/3 \end{bmatrix}$$

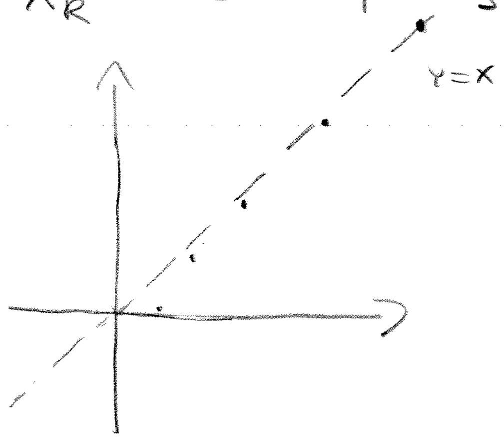
$$x_2 = 45 v_1 - \tfrac{4}{9} v_2 = \begin{bmatrix} 45 \\ 45 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4/9 \\ 4/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45\,4/9 \\ 44\,5/9 \end{bmatrix}$$



b)

$$x_k = 3^k \cdot 5 v_1 - 3^{-k} \cdot 4 \cdot v_2$$

c)



v_2 KERROIN PIENENEE, KUN k KASVAA
$\Rightarrow$ PISTEET LÄHESTYVÄT SUORAA Y=X ASYMPTOOTTISESTI

LV8

2.

$$A = VDV^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}^{= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\,2/3 & 1\,1/3 \\ 1\,1/3 & 1\,2/3 \end{bmatrix}$$

3. a)

AV 5b $\quad A = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}07 \end{bmatrix}$

$$\bar{x}_{n+1} = A\bar{x}_n$$

x_1, x_2 -TASOSSA OLEVA VEKTORI $\Rightarrow x_3 = 0$

PISTE JÄÄ SIIS PYÖRIMÄÄN x_1, x_2-TASOON, EIKÄ SEN ETÄISYYS ORIGOSTA MUUTU.*)

KIERTOKULMA x_1, x_2 TASOSSA:

6LV TEHTÄVÄ 5

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$\Rightarrow$ ARCCOS $0{,}8 = \varphi$

$\varphi \approx 0{,}644$ RAD

$\varphi \approx 36{,}87°$

$0{,}8^2 + 0{,}6^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

*) TÄMÄ NÄHDÄÄN ESIM. SIITÄ, ETTÄ OSAMATRIISI $\begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{bmatrix}$ ON KIERTOMATRIISIN MUOTOA, TAI ETTÄ SE ON ORTOGONAALINEN.

LV8

3b)

SAMA KIERTOKULMA, MUTTA x_3-KOORDINAATTIIN TULEE JOKAISELLA ITERAATOLLA 7% LISÄÄ.

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ 1{,}07\,x_{30} \end{bmatrix} \quad \text{JNE.}$$

c) KUVAT LIITTEENÄ.

4

a) $A = \begin{bmatrix} 1{,}7 & -0{,}3 \\ -1{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$

OM. ARVOT $\begin{vmatrix} 1{,}7-\lambda & -0{,}3 \\ -1{,}2 & 0{,}8-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(1{,}7-\lambda)(0{,}8-\lambda) - 0{,}3 \cdot 1{,}2 = 0$

$\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1 = 0$

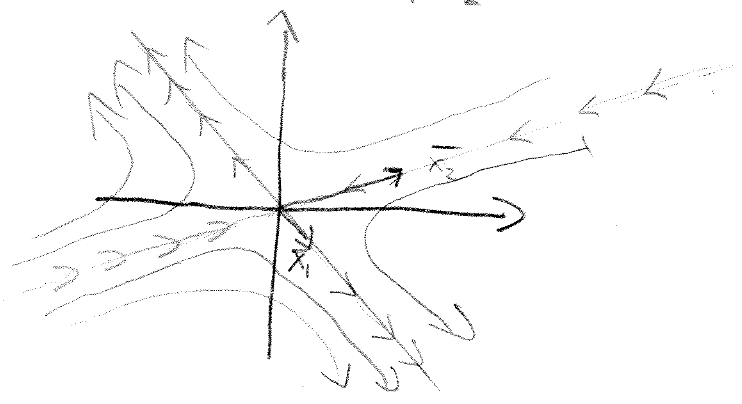
$\dfrac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} \end{matrix} \Big\} \Rightarrow$ ORIGO ON SATULA, KOSKA TOINEN OM. ARVO >1 JA TOINEN <1

$\lambda_1 = 2$:

$\begin{cases} -0{,}3x_1 - 0{,}3x_2 = 0 \\ -1{,}2x_1 - 1{,}2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = \frac{1}{2}$

$\begin{cases} 1{,}2x_1 - 0{,}3x_2 = 0 \\ -1{,}2x_1 + 0{,}3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$



(AUPS, PIIRTO MOKA. KUVASSA x_2 NÄYTTÄÄ ENEMMÄNKIN VEKTORILTA $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ KUIN $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. IDEA SILTI SAMA)

LV 8

4 b) $A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 \\ -0,3 & 1,1 \end{bmatrix}$

OM. ARVOT

$$\begin{vmatrix} 0,3-\lambda & 0,4 \\ -0,3 & 1,1-\lambda \end{vmatrix} = (0,3-\lambda)(1,1-\lambda) + 0,3 \cdot 0,4 = 0$$

$\lambda^2 - 7/5\,\lambda + 9/20 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0,5 \ (<1)$

$\lambda_2 = 0,9 \ (<1)$

ORIGO ON SIIS ATTRAKTORI

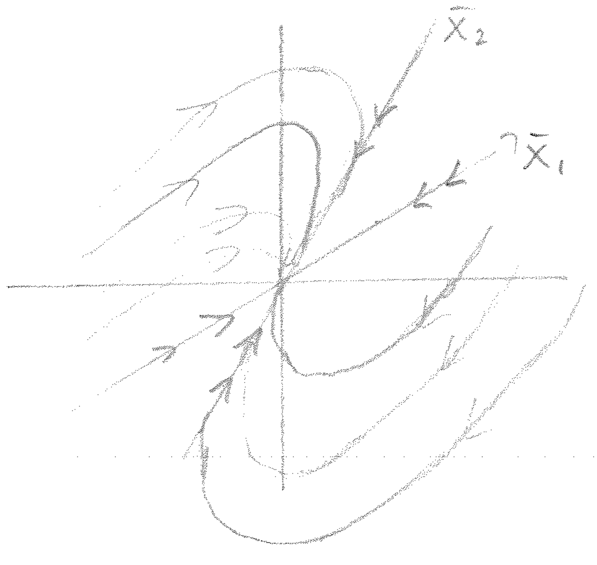
OM. VEKT.

λ_1:

$$\begin{bmatrix} -0,2 & 0,4 \\ -0,3 & 0,6 \end{bmatrix} \bar{x}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

λ_2:

$$\begin{bmatrix} -0,6 & 0,4 \\ -0,3 & 0,2 \end{bmatrix} \bar{x}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



LV 8

5.

X symmetrinen: X reaalinen ja $X^T = X$ om. arvot reaalisia

X vinosymmetrinen: X reaalinen ja $X^T = -X$ om. arvot imaginaarisia (tai $= 0$)

X hermiittinen: $X^* = X$ om. arvot reaalisia

X vinohermiittinen: $X^* = -X$ om. arvot imaginaarisia (tai $= 0$)

X unitaarinen: $X^* X = I$ om. arvot itseisarvoltaan $= 1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$ vinosymmetrinen, vinohermiittinen

$$A^* A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ unitaarinen

ominaisarvot: $$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$$

imaginaarisia,

$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$

5...

$$B = \begin{bmatrix} i/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & i/2 \end{bmatrix}$$

ei symmetrinen eikä vinosymmetrinen
(kaikki alkiot eivät reaalisia)

ei hermiittinen eikä vinohermiittinen

$$B^*B = \begin{bmatrix} -i/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -i/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & i/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ unitaarinen

$$\begin{vmatrix} \frac{i}{2}-\lambda & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{i}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{i}{2}-\lambda\right)^2 - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{i}{2}-\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{i}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|\lambda| = \left|\frac{i}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$$ OK

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & 0 \\ 1-i & 0 & 1+i \\ 0 & 1-i & 0 \end{bmatrix}$$

ei symmetrinen
ei vinosymmetrinen

on hermiittinen ($\Rightarrow$ ei vinohermiittinen)

$$C^*C = C^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & 4 & 0 \\ -2i & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

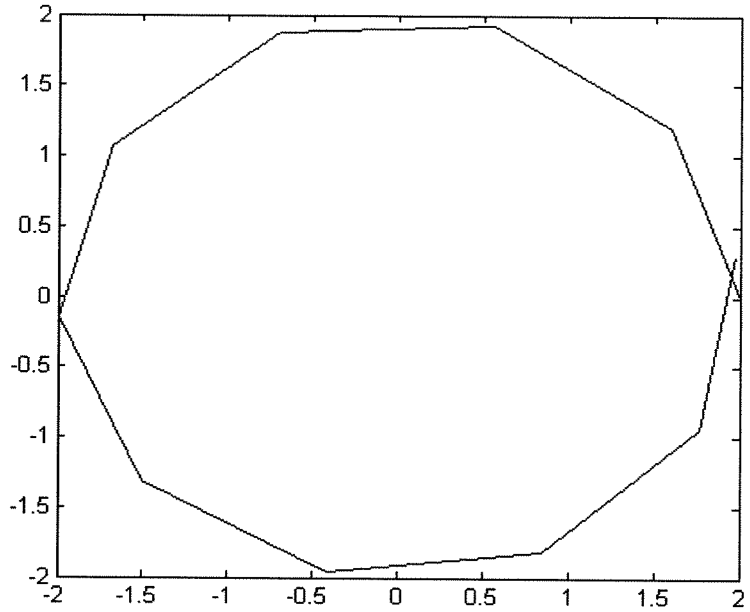
ei unitaarinen

$$\det(C-\lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda = \lambda(4-\lambda^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ tai } \lambda = \pm 2$$

3c)

```
clear all;
A=[0.8 -0.6 0;0.6 0.8 0;0 0 1.07];
x=[2; 0; 0];
for i=1:11
   X(i,1)=x(1); X(i,2)=x(2); X(i,3)=x(3);
   x=A*x;
end
```




```
plot(X(:,1),X(:,2));
x=[2; 0; 1];
plot3(X(:,1),X(:,2),X(:,3));
```