K3/P3 Syksy 2005 7LV

Tehtävä 1.

a) Heijastus y-akselin suhteen $\mathbb{R}^2$:ssa

Lineaarikuvauksen matriisi $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Diagonaalimatriisin ominaisarvot ja -vektorit nähdään suoraan

$\lambda_1 = -1 \quad , \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 1 \quad , \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Huom! Ominaisvektorit voidaan kertoa luvulla α, $\alpha \neq 0$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ käy siis ihan yhtä hyvin kuin $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) Ks. 6AV TEHTÄVÄ 2B

$\lambda_1 = i \quad , \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -i \quad , \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

c) Heijastus yz-tason suhteen $\mathbb{R}^3$:ssa

Lineaarikuvaus $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Jälleen nähdään suoraan:

$\lambda_1 = -1, \quad \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_2 = 1$, jota vastaa kaksi vektoria

$\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $\bar{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) Projektio y-akselille (x kuvautuu nollaksi)

Lineaarikuvaus $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = 0$, ominaisvektori: $x_2 = 0$, x_1 vapaa valitaan $\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 1$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x_1 = 0$, x_2 vapaa valitaan $\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tehtävä 2.

a)

Jos λ on $\mathbf{A}$:n ominaisarvo, ja $\mathbf{x}$ on vastaava ominaisvektori, pätee:

$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$

Kirjoitetaan auki $\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{Ax}$

$= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A} \cdot \lambda\mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{Ax} = \lambda \cdot \lambda \cdot \ldots \cdot \lambda\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$.

λ^k on siis $\mathbf{A}^k$:n ominaisarvo, ja $\mathbf{x}$ on sitä vastaava ominaisvektori. □

b)

Oletetaan että $\mathbf{A}$ on kääntyvä.

$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$

Kerrotaan vasemmalta $\mathbf{A}^{-1}$:llä:

$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\lambda\mathbf{x}$ tiedetään, että $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

$\mathbf{Ix} = \mathbf{A}^{-1}\lambda\mathbf{x}$

$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ jaetaan λ:lla (perustellaan myöhemmin, miksi se ei voi olla 0)

$\frac{1}{\lambda}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$

$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}\mathbf{x}$

λ^{-1} on siis $\mathbf{A}^{-1}$:n ominaisarvo, ja $\mathbf{x}$ on sitä vastaava ominaisvektori. □
Oletetaan, että ominaisarvo on 0. Tällöin saadaan $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

Homogeenisella systeemillä esiintyy ei-triviaaleja ratkaisuja (triviaaliratkaisu ei käy, koska $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ei käy ominaisvektoriksi) vain, jos rangi $\mathbf{A} < n$ [KRE,8th, s.340]. Oletuksen mukaan $\mathbf{A}$:n käänteismatriisi on olemassa, mikä on mahdollista vain, jos $\mathbf{A}$:n rangi on täysi. Tästä seuraa että homogeenisysteemin ainoa ratkaisu on triviaaliratkaisu, jota ei hyväksytä ominaisvektoriksi. Ominaisarvo ei siis voi olla 0 (eli jakaminen λ:lla oli laillinen toimenpide).

Toisin sanoen: Jos $\lambda = 0$ olisi A:n ominaisarvo ja $x \neq 0$ vastaava ominaisvektori, niin kaikille matriiseille B pätisi

$$\underbrace{BAx}_{=0x=0} = B0 = 0 \neq x$$

eli mikään matriisi B ei olisi A:n käänteismatriisi. Siis A ei olisi kääntyvä.

Tehtävä 3.

$P=\begin{bmatrix}0.8 & 0.22\\0.2 & 0.78\end{bmatrix}$ on kuukausittainen siirtymämatriisi ts. uusi tila (kuukauden kuluttua) saadaan kertomalla vanha tila **P**:llä. Tasapaino on saavutettu jos uusi tila on sama kuin vanha tila eli **Px = x.** Ominaisarvon määritelmää käyttäen tämä tarkoittaa että siirtymämatriisilla on ominaisarvo 1, jota vastaava ominaisvektori **x** on haluttu tasapainotila. Ratkaistaan **x**:

$(\mathbf{P} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$

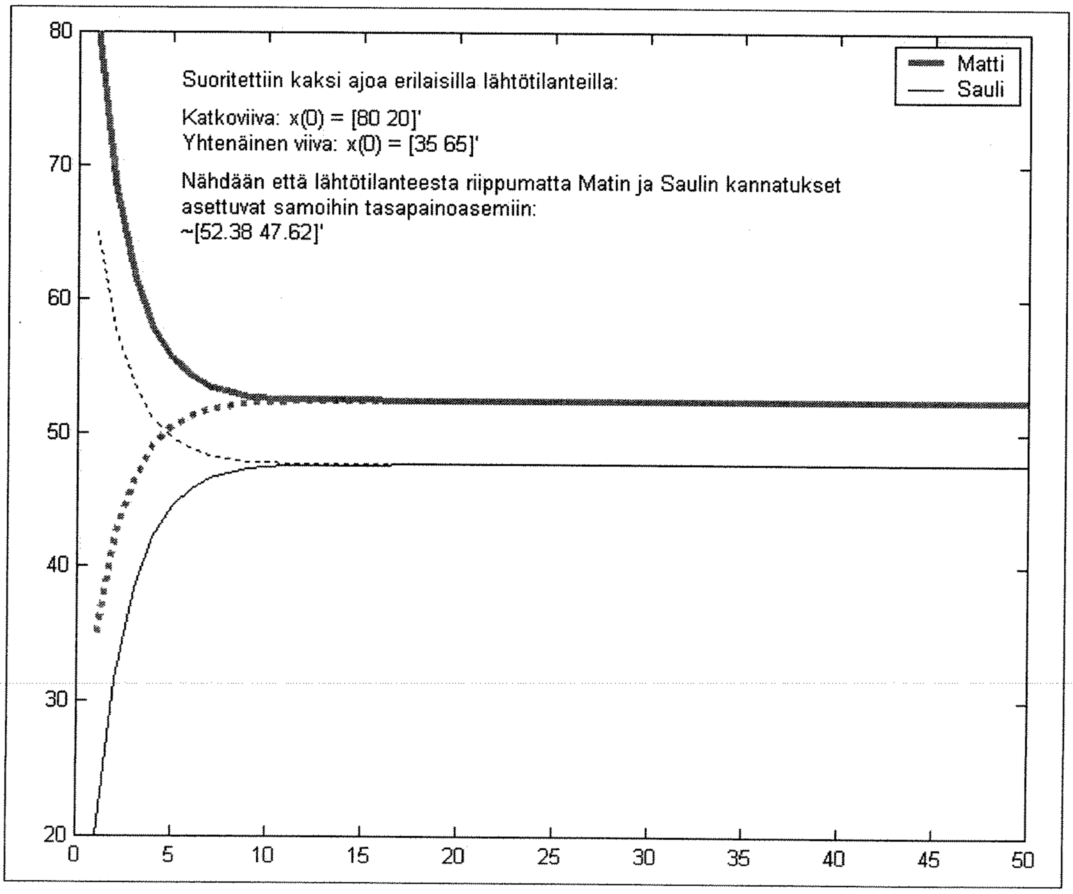
$(\mathbf{P} - \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$(P-I)=\begin{bmatrix}-0.2 & 0.22\\0.2 & -0.22\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-0.2 & 0.22\\0 & 0\end{bmatrix}$, josta saadaan ratkaisu $x_1 = 1{,}1x_2$.

Lisäksi tiedetään että $x_1 + x_2 = 100$. Ratkaistaan **x**:

$$x_1 = 1{,}1(100 - x_1)$$
$$2{,}1x_1 = 110$$
$$x_1 = 52{,}381$$

$\rightarrow x_2 = 47{,}619$. Tasapainotila on siis $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}52{,}381\\47{,}619\end{bmatrix}$ eikä se riipu alkutilanteesta; yllä esitetyissä laskuissa ei tehty mitään oletuksia alkutilasta! (Ainoastaan se, että summa on 100)



Kuva 1. Laskettiin uusia tiloja x(k) = P*x(k-1), kun k = [1, 2, …, 50] kahdesta eri alkutilanteesta lähtien.

Tehtävä 4.

P on $n \times n$ matriisi:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Lisäksi **P** on stokastinen, eli sarakesummat ovat 1:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1 \qquad \text{kaikilla } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Lasketaan
$$P^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} + & p_{21} + & \cdots & + p_{n1} \\ p_{12} + & p_{22} + & \cdots & + p_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} + & p_{2n} + & \cdots & + p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} p_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} p_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} p_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Saatiin siis $P^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

Yhtälön muoto vastaa ominaisarvon määritelmää $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$, eli $\mathbf{P}^T$:n ominaisarvo on 1 ja sitä vastaava ominaisvektori on $[1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]^T$. Transpoosi ei vaikuta ominaisarvoihin, joten myös $\boldsymbol{P}$:llä on aina ominaisarvo 1.

Tehtävä 5.

Yläkolmiomatriisin ominaisarvot ovat sen diagonaalialkiot. $\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Selvitetään ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit:

$$\lambda = 2: \qquad (A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = vapaa,$
$x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

Valitaan $x_1 = 1$, ominaisvektori on siis $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\lambda = 1: \qquad (A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_3 = 0,$
$x_1 = -2x_2$

Valitaan $x_1 = 1$, ominaisvektori on siis $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\lambda = -1: \qquad (A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_2 = -x_3$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$
$\Leftrightarrow 3x_1 = x_3$

Valitaan $x_3 = 3$, ominaisvektori on siis $\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

Muodostetaan ominaisvektoreista matriisi $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Lasketaan **V**:n käänteismatriisi esim.[**V I**]:n avulla rivioperaatioita käyttäen. Saadaan:

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \text{[illegible]} \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad 5/3$$

Nyt $\mathbf{A}^6$ voidaan laskea kaavasta $\mathbf{A}^6 = \mathbf{V}\mathbf{D}^6\mathbf{V}^{-1}$, jossa **D** on ominaisarvoista muodostettu diagonaalimatriisi. Sen potenssi on helppo laskea:

$$\mathbf{D}^6 = \begin{bmatrix} 2^6 & 0 & 0 \\ 0 & 1^6 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Suoritetaan kertolasku (Matlabilla):

$$\mathbf{A}^6 = \begin{bmatrix} 64 & 126 & 105 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tehtävä 6.

a)

Ominaisarvoihin λ_i liittyvät ominaisavaruudet $\mathbf{E}_{\lambda i}$ koostuvat kaikista kyseiseen ominaisarvoon liittyvistä ominaisvektoreista (ja nollavektorista). Ominaisavaruuden $\mathbf{E}_{\lambda i}$ dimensio, dim($\mathbf{E}_{\lambda i}$) on kyseisen ominaisarvon λ_i geometrinen kertaluku (merkitään $m_{\lambda j}$).

Jos ominaisavaruuden dimensio on esimerkiksi 2, siihen liittyy 2 lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.

Nyt matriisilla **A** on yhteensä 2 + 3 = 5 lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria (kaksi vektoria 2-ulotteisesta ominaisavaruudesta ja kolme vektoria 3-ulotteisesta ominaisavaruudesta), joten ominaisvektoreista muodostetulla matriisilla **V** on täysi rangi. (Ominaisvektorit ovat **V**:n sarakkeina.) Tästä voidaan päätellä että $\mathbf{V}^{-1}$ on olemassa.

<u>**A** on siis diagonalisoituva</u>, koska $\mathbf{D} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{AV}$.

b)

Nyt LRT ominaisvektoreita on 1+1 = 2 < n (koska nyt n = 3)

<u>**A** ei ole diagonalisoituva</u>, koska R^n:llä ei ole **A**:n ominaisvektorikantaa

c)

Nyt on annettu kahteen ominaisarvoon liittyvät geometriset kertaluvut, joiden summa on 1 + 2 = 3. Lisäksi on yksi ominaisarvo, jonka geometrisen kertaluvun täytyy olla $1 \leq m_{\lambda j} \leq M_{\lambda j}$. Kyseiseen ominaisarvoon liittyvän algebrallisen kertaluvun $M_{\lambda j}$ täytyy nyt olla 1, eli myös $m_{\lambda j} = 1$.

LRT ominaisvektorien kokonaismäärä on siis 1 + 2 + 1 = 4, eli R^n:llä on **A**:n ominaisvektorikanta, jolloin <u>**A** on diagonalisoituva</u>.

d)

Lause: R^n:llä on A:n ominaisvektorikanta, jos ja vain jos A:n jokaisella ominaisarvolla on $m_{\lambda j} = M_{\lambda j}$.

Nyt on mahdollista, että ensimmäisellä ja toisella ominaisarvolla tämä toteutuu, mutta kolmannelle geometrinen kertaluku on 1 (kun algebrallinen kertaluku on 2). <u>On mahdollista että **A** ei ole diagonalisoituva.</u>