Matematiikan peruskurssi K3/P3 6LV
SYKSY 2005

1. $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix} \cdot 2 \sim \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot 3 \sim$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot(-5) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot(-2) \sim$

(VOISI HYVIN LOPETTAA TÄHÄNKIN VAIHEESEEN)

$\begin{array}{ccccc} * & & * & & \\ \end{array}$
$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

* pivot-rivit

eli sarakeavaruuden col(A) kanta on $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

ja riviavaruuden kanta row(A) on $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

Kannoissa on 2 vektoria, joten A:n rangi $R(A) = 2$

A on 3×5 matriisi, joten $n = 5$

Dimensiolause: $R(A) + N(A) = n \Rightarrow N(A) = n - R(A) = 5 - 2 = 3$

2. Etsitään A:n nolla-avaruuden kanta, eli sellaisten vektoreiden kanta, jotka kuvautuvat nollaksi

$A\bar{x} = 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_4 - 3x_5 = 0 & \Rightarrow x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 & \Rightarrow x_3 = 2x_5 - 2x_4 \end{cases}$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ 2x_5 - 2x_4 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \overset{*}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_4 \overset{*}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_5 \overset{*}{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

x_2, x_4 ja x_5 ovat nyt vapaasti valittavia muuttujia joten $*$:llä merkityt vektorit muodostavat A:n nolla-avaruuden kannan

3. Ohjeen mukaan käänteismatriisille riittää ehto $XY = I$, jolloin $X = Y^{-1}$. Lisäksi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

a) $(A^{-1})^2 A^2 = A^{-1}A^{-1}AA = A^{-1}IA = A^{-1}A = I$

Nyt $X = (A^{-1})^2$, $Y = A^2$ ja $X = Y^{-1}$ eli $(A^{-1})^2 = (A^2)^{-1}$

b) Matriisin transpoosille pätee $(XY)^t = Y^t X^t$

$(A^{-1})^t A^t = (AA^{-1})^t = I^t = I$

Nyt $X = (A^{-1})^t$, $Y = A^t$ ja $X = Y^{-1}$ eli $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

4.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix}$$

$$+ \ldots + 0 \cdot \begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} + 0$$

$= \dots = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

Vastaavasti alakolmiomatriisille. Silloin alideterminantit kehitetään vain viimeisen sarakkeen suhteen.

Vaihtoehtoinen tapa:

Osoitetaan väite induktiolla:

Merkitään A_n:llä $n \times n$ alakolmiomatriisia

Tällöin $\det(A_1) = |a_{11}| = a_{11}$

Induktio-oletus: $\det(A_{k-1}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{(k-1)(k-1)}$

Induktio-väite: $\det(A_k) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{kk}$

Determinantti voidaan kehittää kaavalla

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Eliminoidaan k. rivin suhteen, eli valitaan $j = k$

$M_{kk} = \det(A_{k-1})$ ja alakolmiomatriisissa $a_{ik} = 0$, kun $i \neq k$

$$\det(A_k) = \sum_{i=1}^{k} a_{ik} (-1)^{i+k} M_{ik} = a_{kk} \underbrace{(-1)^{2k}}_{=1 \forall k} M_{kk} + \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{a_{ik}}_{=0} (-1)^{i+k} M_{ik}$$

$$= a_{kk} M_{kk} = a_{kk} \det(A_{k-1}) \overset{\text{induktio-oletus}}{=} a_{kk} \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{(k-1)(k-1)}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{kk}$$

Eli induktio todistus on valmis ja väite pätee kaikilla $n \in \{1, 2, \dots\}$

Lisäksi $\det(A^T) = \det(A)$, joten tulos pätee myös yläkolmiomatriiseille

$z = x + iy$, $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

5. $w = u + iv = f(z) = e^{i\varphi}z = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(x + iy)$

$= x\cos\varphi + iy\cos\varphi + ix\sin\varphi - y\sin\varphi$

$= (x\cos\varphi + y(-\sin\varphi)) + i(x\sin\varphi + y\cos\varphi)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = x\cos\varphi + y(-\sin\varphi) \\ v = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

6. Olkoon T_1 ensimmäinen kuvaus, jolloin saadaan:

$e_1 \to e_1$ eli $T_1 e_1 = e_1$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a = 1 \text{ ja } c = 0$$

$e_2 \to e_2 - 0{,}5\, e_1$ eli $T_1 e_2 = e_2 - 0{,}5\, e_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b = -\frac{1}{2} \\ d = 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow T_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T_2 olkoon jälkimmäinen kuvaus. Lasketaan se katsomalla miten yksikkövektorit kuvautuvat siinä

$e_1 \to -e_1$ eli $T_2 e_1 = -e_1$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = -1 \\ c = 0 \end{matrix}$$

$e_2 \to e_2$ eli $T_2 e_2 = e_2$:

$$\begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b = 0 \\ d = 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow T_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lasketaan lopuksi yhdistetty kuvaus T:

$$T = T_2 T_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$