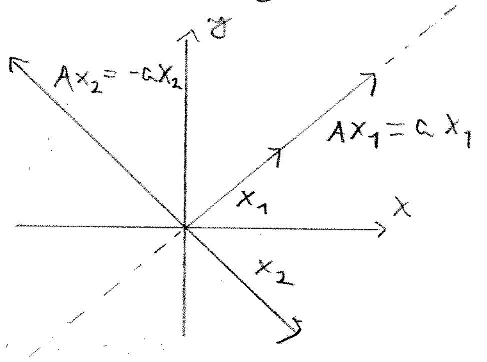
Matematiikan peruskurssi K3/P3 6 AV

1. a) $Ae_1 = a e_2$ ja $Ae_2 = a e_1$

Kuvaus siis skaalaa vektoreita a:lla ja heijastaa ne suoran $x = y$ suhteen.



$\lambda_1 = a$ ja $\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -a$ ja $\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) Ominaisarvoyhtälöllä $A\bar{x} = \lambda \bar{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$ on ei-triviaaleja ratkaisuja $(x \neq 0)$ kun $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm a$$

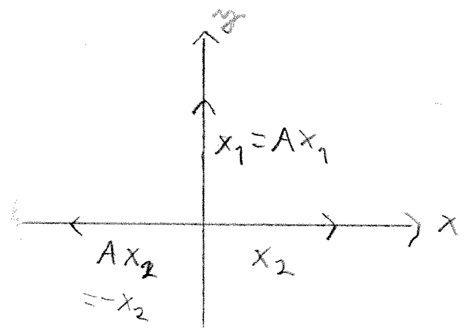
Eli saatiin ominaisarvoiksi $\lambda_1 = a$ ja $\lambda_2 = -a$.
Lasketaan vielä näitä vastaavat ominaisvektorit sijoittamalla ominaisarvot ominaisarvoyhtälöön:

$\lambda_1 = a$: $\begin{bmatrix} -a & a \\ a & -a \end{bmatrix} \bar{x}_1 = \bar{0} \Rightarrow \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -a$: $\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \bar{x}_2 = \bar{0} \Rightarrow \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Huom! Ominaisvektoreiksi käyvät myös kaikki muut vektorit muotoa $\alpha \bar{x}$, $\alpha \neq 0$

2. a) y-akselin suuntaiset vektorit kuvautuvat itselleen, eli $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ on ominaisvektori ominaisarvolla $\lambda_1 = 1$.
x-akselin suuntaiset vektorit kuvautuvat vastavektoreikseen, eli $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ on ominaisarvoa $\lambda_2 = -2$ vastaava ominaisvektori.



b) 6 LV tehtävä 5 $A = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$

$\lambda_1 = i$: $\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \bar{x}_1 = \bar{0}$ eli $\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -i$: $\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \bar{x}_2 = \bar{0}$ eli $\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

c) z- ja y-suuntaiset vektorit kuvautuvat itselleen ja x-suuntaiset vastavektoreiksi, eli $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = -1$
λ_1:stä vastaa $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja λ_2:sta $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

d) y:n suuntaiset vektorit kuvautuvat itselleen, eli $\lambda_1 = 1$ ja vastaava ominaisvektori $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
x:n suuntaiset vektorit taas kuvautuvat nolliksi eli $\lambda_2 = 0$ on ominaisarvo ja $\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sitä vastaava ominaisvektori

3. $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$+ 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$

3. jatkuu

$$= (2-\lambda)((3-\lambda)(2-\lambda)-2) - 2(2-\lambda-1) + (2-3+\lambda)$$

$$= (2-\lambda)(6-5\lambda+\lambda^2-2) + 2\lambda - 2 - 1 + \lambda$$

$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 2\lambda^2 - 10\lambda + 8 + 3\lambda - 3$$

$$= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0$$

Yksi juuri on $\lambda = 1$ eli $\lambda - 1$ on $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5$:n tekijä.

$$\begin{array}{r|l} & -\lambda^2 + 6\lambda - 5 \\ \hline \lambda - 1 & -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 \\ & \underline{-\lambda^3 + \lambda^2} \\ & 6\lambda^2 - 11\lambda \\ & \underline{6\lambda^2 - 6\lambda} \\ & -5\lambda + 5 \\ & \underline{-5\lambda + 5} \\ & 0 \end{array}$$

Eli $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ tai $-\lambda^2 + 6\lambda - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ tai } \lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{-2} = \frac{-6 \pm 4}{-2} = 3 \mp 2$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ tai } \lambda_2 = 5$$

Ominaisarvoa $\lambda_1 = 1$ vastaavat ominaisvektorit:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}_1 = \bar{0} \Rightarrow \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ ja } \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 5$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \bar{x}_2 = \bar{0} \Rightarrow \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. jatkuu

$M_{\lambda_1} = m_{\lambda_1} = 2$ ja $M_{\lambda_2} = m_{\lambda_2} = 1$

$$E_{\lambda_1} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$E_{\lambda_2} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

4. $$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$+ 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} = (1-\lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Sijoitetaan ominaisarvo $\lambda = 1$ ominaisarvoyhtälöön:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eli $M_\lambda = 3$ ja $m_\lambda = 1$

5. A on yläkolmiomatriisi, eli muotoa:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ ja } A-\lambda I = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

6 LV tehtävän 4 mukaan: $\det(A-\lambda I) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdot\ldots\cdot(a_{nn}-\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda_i = a_{ii}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

6. Matriisin A karakteristinen polynomi:

$$\det(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^t) = \det(A^t - (\lambda I)^t)$$

$$= \det(A^t - \lambda I)$$

Eli A:lla ja A^t:llä on sama karakteristinen polynomi. Näillä polynomeilla on siis samat nollakohdat, jotka ovat polynomia vastaavan matriisin ominaisarvot. Siis A:lla ja A^t:llä on samat ominaisarvot.