Mat. pk. K3 | P3 syksy 2005 (5 AV)

1 Ol. $x_1 \neq x_2$, x_1 ja x_2 ratkaisuja eli $Ax_1 = b$ ja $Ax_2 = b$

$\Rightarrow A[(1-p)x_1 + px_2] = (1-p)Ax_1 + pAx_2 = (1-p)b + pb = b$, $p \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (1-p)x_1 + px_2$ on ratkaisu.

Toisaalta, kun $p \neq 0$, $(1-p)x_1 + px_2 \neq x_1$, sillä $(1-p)x_1 + px_2 = x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$.
Samoin, kun $p \neq 1$, $(1-p)x_1 + px_2 \neq x_2$.
Siis olemassa kolmaskin ratkaisu. (itse asiassa äärettömästi)

2 LINYHT (pivot-muoto): systeemi $Ax = b$ konsistentti

$\Leftrightarrow$ Gaussatun liitännäismatriisin $[A\ b]$ viimeinen sarake ei ole tukisarake.

a) On, sillä silloin viimeinen sarake $[A\ b]$:n ref-muodossa ei ole tukisarake.

c) Jokaisella rivillä tukialkio (= nollasta poikkeavan rivin 1. ei-nolla alkio)
$\Rightarrow$ LINYHT:n nojalla konsistentti.

5.A2... b)

3×6-systeemi tarkoittaa:
kerroinmatriisi A on kokoa 3×6,
jolloin liitännäismatriisi $\tilde{A} = [A|b]$ on kokoa 3×7.

Tällainen systeemi voi olla konsistentti, esim.:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc|c} & & & & & \text{KUUDES SARAKE} & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \end{array}$$

← Gaussattu liitännäismatriisi

mutta se voi myös olla olematta, esim.:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Jos olisi oletettu, että <u>liitännäismatriisi</u> on kokoa 3×6,

niin systeemi ei olisi konsistentti.

(Kuudes sarake olisi liitännäismatriisin viimeinen sarake eli yhtälön $Ax=b$ oikea puoli.)

5.A3 Vektorit $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$\vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ovat $\mathbb{R}^4$:n kanta, koska niitä on $4 = \dim \mathbb{R}^4$ ja

yhtälön $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 + c_4\vec{a}_4 = 0$ (1)

ainoa ratkaisu on $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 + 1 \cdot c_4 = 0 & \Rightarrow c_4 = 0 \\ 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 + 1 \cdot c_4 = 0 & \Rightarrow c_3 = 0 \\ 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 + 1 \cdot c_4 = 0 & \Rightarrow c_2 = 0 \\ 1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 + 1 \cdot c_4 = 0 & \Rightarrow c_1 = 0 \end{cases}$$

$\vec{v}$:n esitys tässä kannassa: $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 + c_4\vec{a}_4 = \vec{v}$

$$\begin{cases} c_4 = -1 & \Rightarrow \underline{\underline{c_4 = -1}} \\ c_3 + c_4 = 0 & \Rightarrow \underline{\underline{c_3 = 1}} \\ c_2 + c_3 + c_4 = 1 & \Rightarrow \underline{\underline{c_2 = 1}} \\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 2 & \Rightarrow \underline{\underline{c_1 = 1}} \end{cases}$$

(4)

risteykset ja verkosta poistumien

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 400 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 300 \\ x_1 + x_2 = 800 \\ x_1 + x_5 = 600 \\ x_4 + x_5 = 500 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 800 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 800 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 600 - x_5 \\ x_2 = 200 + x_5 \\ x_3 = 400 \\ x_4 = 500 - x_5 \\ x_5 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Suuntia ei vaihdeta $\Rightarrow x_5 \in [0, 500]$

$\Rightarrow x_1 \in [100, 600]$.

5.A5

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \\ -3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ +1 \\ -\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ (\cdot 3) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ -1 \\ -1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriisin rangi säilyy Gaussituksessa.

Rangi on gaussitetun matriisin nollasta poikkeavien rivien lukumäärä eli tässä $\underline{\underline{2}}$.

5.A6

$$[A\ I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -4 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ 3 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \vert : 2 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{array}{ll} \\ \\ -2 & -3 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix} = [I\ A^{-1}]$$

$$\underline{\underline{A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}}$$