VERSIO 2

Mat-1.433 K3/P3 4 AV SYKSY 2005

1. $y'' + 2cy' + \omega_0 y = 0$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = v_0$

a) $\mathcal{L}$-muunnos

$$\Rightarrow s^2 Y - s y(0) - y'(0) + 2csY - 2cy(0) + \omega_0^2 Y = 0$$

$$Y(s^2 + 2cs + \omega_0^2) = sy_0 + v_0 + 2cy_0$$

$$Y = \frac{sy_0 + v_0 + 2cy_0}{(s^2 + 2cs + c^2 + \omega_0^2 - c^2)} = \frac{sy_0 + v_0 + 2cy_0}{(s+c)^2 + \omega_0^2 - c^2}$$

b) $\omega_0 = c \Rightarrow Y = \dfrac{y_0(s+c) + v_0 + y_0 c}{(s+c)^2}$

$$= \frac{y_0}{(s+c)} + \frac{v_0 + y_0 c}{(s+c)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\} = y_0 e^{-ct} + (v_0 + y_0 c) t e^{-ct} = ((v_0 + y_0 c)t + y_0) e^{-ct}$$

2.

$$f(t) = \begin{cases} t^2 , & 0 \le t < 2 \\ 4 , & t \ge 2 \end{cases}$$

* Kirjoitetaan muotoon $(t-2)^m u(t-2)$

$$f(t) = t^2 u(t) - t^{2*} u(t-2) + 4u(t-2)$$

$$= t^2 u(t) - (t-2)^2 u(t-2) + 4u(t-2) - 4t^{*} u(t-2) + 4u(t-2)$$

$$= t^2 u(t) - (t-2)^2 u(t-2) + \cancel{8u(t-2)} - 4(t-2)u(t-2) - \cancel{8u(t-2)}$$

$$= t^2 u(t) - (t-2)^2 u(t-2) - 4(t-2)u(t-2)$$

$$\mathcal{L}\{\} = \frac{2}{s^3} - e^{-2s}\cdot\frac{2}{s^3} - 4e^{-2s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{2}{s^3} + e^{-2s}\left(-\frac{2}{s^3} - \frac{4}{s}\right)$$

3.

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma t} \quad (*)$$

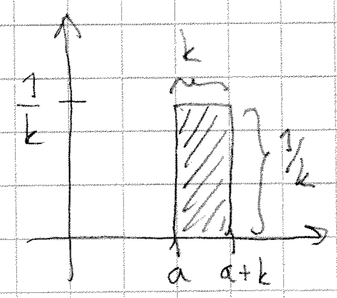
$$|\mathcal{L}(f)| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right| \leq \int_0^\infty |f(t)| e^{-st}\,dt \leq \int_0^\infty Me^{\sigma t} e^{-st}\,dt$$

$$= M\int_0^\infty e^{(\sigma-s)t}\,dt = M \Big/_0^\infty \frac{1}{\sigma-s} e^{(\sigma-s)t} = 0 - M\frac{1}{\sigma-s}e^0 = \frac{M}{s-\sigma}$$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{M}{s-\sigma} = 0 \quad \text{joten myös} \quad \lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

Diracin deltan määrittely:

$$f_k(t-a) = \begin{cases} 1/k, & a \leq t \leq a+k \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$



$$\int_0^\infty f_k(t-a)\,dt = \int_a^{a+k} \frac{1}{k}\,dt = 1 \quad , \left(\Big/_a^{a+k} \frac{t}{k} = \frac{a+k}{k} - \frac{a}{k} = 1 \right)$$

nyt jos $k \to 0$, antaa ylempi lauseke arvon ∞ pisteessä $t=a$ ja alempi integraaliksi arvon 1. Tämä tulos on ristiriidassa tavallisen funktion käsitteen kanssa, koska jos tavallinen funktio saa arvon 0, kaikkialla muualla, paitsi yhdessä pisteessä, on myös sen integraalin oltava 0.

Jos asetetaan $a=0$, kaava $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = e^{-as}$ ([KRE] s. 271) tulee muotoon $\mathcal{L}\delta = e^{-0s} = 1 \xrightarrow{s\to\infty}\not\to 0$. Tästäkin nähdään, ettei δ ole niin nätti, että se olisi paloittain jatkuva ja toteuttaisi ehdon (*).

4. $y'' + 3y' + 2y = r(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $r(t) = 2\delta(t-2)$

$\mathcal{L}$-muunnos $\qquad \mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

$$s^2 Y - s\underbrace{y(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=0} + 3sY - 3\underbrace{y(0)}_{=0} + 2Y = 2e^{-2s}$$

$$Y(s^2 + 3s + 2) = 2e^{-2s}$$

$$Y = 2e^{-2s} F(s) \text{ , missä } F(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

$$F(s) = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)} \Rightarrow \frac{As + 2A + Bs + B}{(s^2 + 3s + 2)}$$

$A + B = 0 \Rightarrow A = -B$

$2A + B = 1 \Rightarrow B = -1$

$A = 1$

$$= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$2\mathcal{L}^{-1}(F) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{2e^{-2s} F(s)\} = 2(e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)})u(t-2)$$

max: $\frac{d}{dt}\left(2(e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)})\right) = -2e^{-t+2} + 4e^{-2t+4} = 0 \quad || :2$

$e^{-t+2} = 2e^{-2t+4} \quad || \ln \quad \Rightarrow \quad -t + 2 = \ln 2 - 2t + 4$

$t = \ln 2 + 2 > 2$, joten $u(t-2)$ ei vaikuta.

Kuvaaja liitteenä.

⑤ a) $F(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1}$

$\mathcal{L}^{-1}(H(s)\cdot G(s)) = h * g$

$\mathcal{L}(h*g) = H(s)G(s)$

nyt $H(s) = \frac{1}{s}$, $h(t) = 1$

$G(s) = \frac{1}{s+1}$, $g(t) = e^{-t}$

konvoluutio: $(h*g)(t) = \int_0^t h(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$

$$f(t) = \int_0^t 1\cdot e^{-t+\tau}\,d\tau = e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\,d\tau = e^{-t}\Big/_0^t e^{\tau} = e^{-t}(e^{t}-e^{0}) = \underline{1-e^{-t}}$$

Osamurtokehitelmän avulla:

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} = \frac{As + A + Bs}{s(s+1)} = \quad A = 1, \; B = -1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) = \underline{1-e^{-t}}$$

"vapaaehtoinen"

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}G(t)$$

nyt $H(s) = \frac{1}{s}$ ja $G(s) = \frac{1}{s+1}$

koska oikealla puolella on kerroin $\frac{1}{s}$, joka vastaa vakiota 1 t-tasossa, on integraalin muuntokaava sama kuin konvoluutio, koska toinen termi konvoluutiossa ($h(t-\tau)$) on yksi.

$$\mathcal{L}\{h*g\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t h(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right\} \overset{h(t-\tau)=1}{=} \mathcal{L}\left\{\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}G(t) = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+1}$$

(5) b) $F(s) = \dfrac{s^2}{(s^2+9)^2}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\cdot\frac{s}{s^2+9}\right\} = \cos(3t) * \cos(3t) = \int_0^t \cos(3\tau)\cos(3t-3\tau) =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2}\cos(3t) + \frac{1}{2}\cos(6\tau - 3t)\,d\tau$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\Rightarrow$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$= \Big/_0^t \frac{\tau}{2}\cos(3t) + \frac{1}{12}\sin(6\tau - 3t)$$

$$= \frac{t}{2}\cos(3t) + \frac{1}{12}\sin(3t) - \left[\frac{1}{12}\sin(-3t)\right]$$

$$= \frac{t}{2}\cos(3t) + \frac{1}{6}\sin(3t) = \frac{1}{6}\Big(\sin(3t) + 3t\cos(3t)\Big)$$

Osamurtotekniikalla

$$F(s) = \frac{s^2}{(s^2+9)^2} = \frac{As+B}{(s^2+9)^2} + {}^{s^2+9)}\frac{Cs+D}{(s^2+9)} = \frac{As+B+Cs^3+Ds^2+9Cs+9D}{(s^2+9)^2}$$

s^3: $C = 0$
s^2: $D = 1$
s: $A + 9C = 0 \Rightarrow A = 0$
1: $B + 9C = 0 \Rightarrow B = -9$

$$F(s) = \frac{-9}{(s^2+9)^2} + \frac{1}{s^2+9} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right] = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+3^2}\right] = \frac{1}{3}\sin 3t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-9}{(s^2+9)^2}\right] = ?$$

Osamurtotekniikka ei auta tässä, koska tätä $\mathcal{L}^{-1}$-muunnosta ei pystytä laskemaan suoraan (ilman konvoluutiota), vrt. [KRE] s.228.

(6) $y'' + 4y = r(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $r(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$

$\mathcal{L}$ - muunnos , $\mathcal{L}(r(t)) = R(s)$

$\Rightarrow s^2 Y - s y(0) - y'(0) + 4Y = R(s)$

$Y(s^2+4) - s = R(s)$

$Y = \frac{R(s)}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+4}$

$\mathcal{L}^{-1}$ - muunnos , merk $Q(s) = \frac{1}{s^2+4}$, $\mathcal{L}^{-1}(Q(s)) = \frac{1}{2}\sin(2t)$

$y(t) = r(t) * \frac{1}{2}\sin(2t) + \overset{*}{\cos}(2t)$

konvoluutio:

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int r(\tau)\sin(2t-2\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cos(2t-2\tau)\right]$

kun $0 < t < 1$:
$0 < \tau < t$

$\Big/_0^t \frac{1}{4}\cos(2t-2\tau) = \frac{1}{4}\cos(0) - \frac{1}{4}\cos(2t) + \overset{*}{\cos}(2t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t) + \cos(2t)$

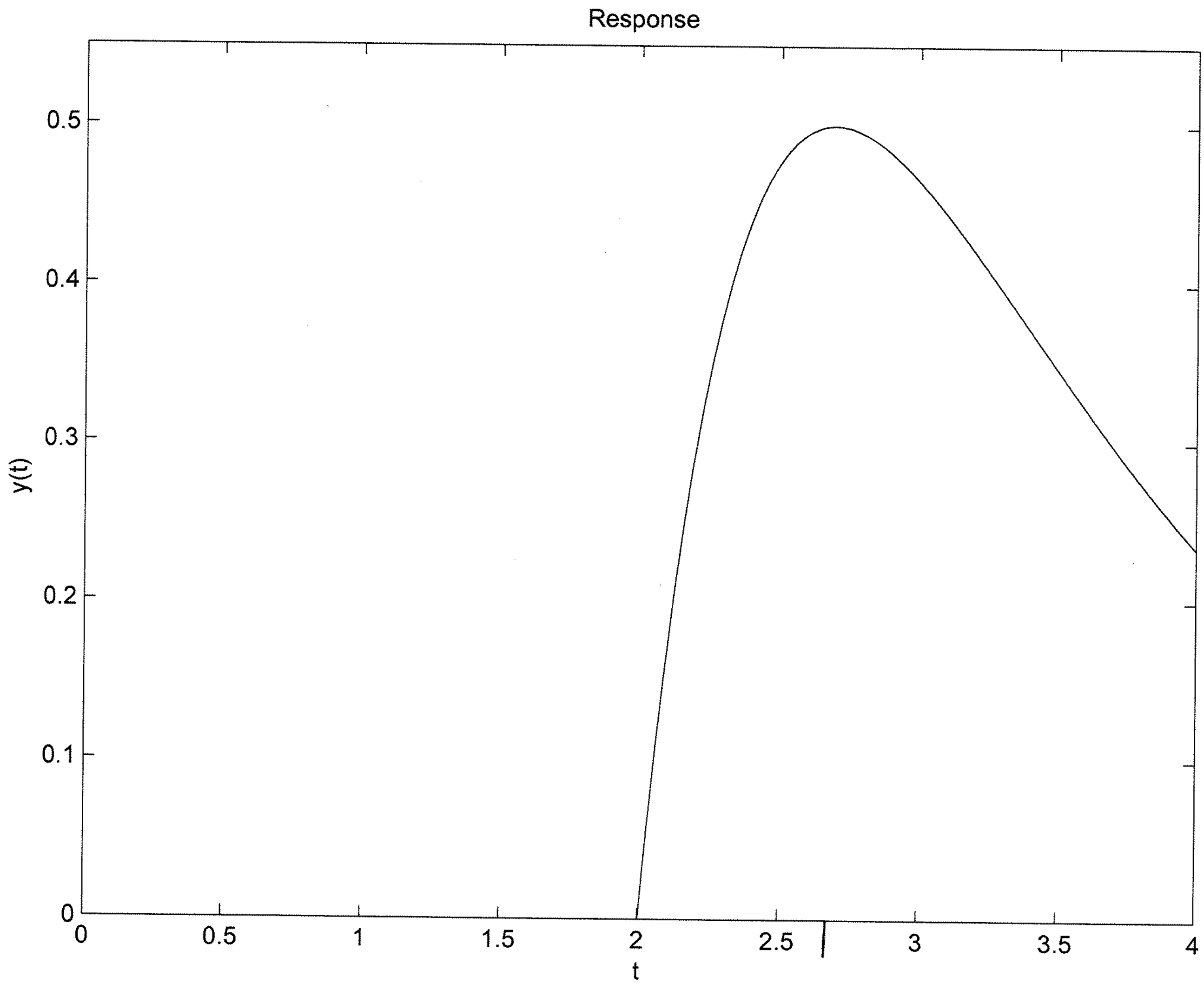
kun $t > 1$:
$0 < \tau < 1$

$\Big/_0^1 \frac{1}{4}\cos(2t-2\tau) = \frac{1}{4}\cos(2t-2) - \frac{1}{4}\cos(2t) + \overset{*}{\cos}(2t)$

$y(t) = \frac{3}{4}\cos(2t) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(\cos(2t-2) - 1)\,u(t-1)$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$\Rightarrow y(t) = \frac{3}{4}\cos(2t) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(\sin(t-1))^2 u(t-1)$

Kuva tehtävään 4



max

$x = 2 + \ln 2$