Harj. 3 AV (viikko 40) alkuviikko malliratkaisut

Tehtävä 1.a

Laplace-muunnoksen määritelmä:

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \qquad (1)$$

Funktio:

$$f(t)=t-2 \qquad (2)$$

Sijoitetaan kaava 2 määritelmään 1:

$$F(s)=\int_0^\infty (t-2)e^{-st}dt=\int_0^\infty (te^{-st}-2e^{-st})dt \qquad (3)$$

Huomataan, että kaavassa 3 pitää käyttää osittaisintegrointia integraalin ensimmäiselle termille. Osittaisintegrointi määrätylle integraalille:

$$\int_a^b f'gdx=\Big/_a^b fg-\int_a^b g'fdx \qquad (4)$$

Käytetään kaavaa 4 kaavan 3 ensimmäiseen termiin. Selvitetään ensin tarvittavat f, g, f’ ja g’:

$$\begin{aligned}
&f'=e^{-st}=(-1/s)(-s)e^{-st}\\
&\rightarrow f=(-1/s)(e^{-st})\\
&g=t\\
&g'=1
\end{aligned}$$

Nyt jatkamalla kaavasta 3 (samalla esimerkki epäoleellisen integraalin laskemisesta):

$$\begin{aligned}
F(s)&=\Big/_0^\infty-(1/s)e^{-st}t-\int_0^\infty 1*(-1/s)e^{-st}dt-\int_0^\infty 2e^{-st}dt\\
&=\lim_{b->\infty}((-1/s)e^{-sb}b+(1/s)e^0\cdot 0)-\lim_{b->\infty}(1/s^2)\int_0^b(-s)e^{-st}dt+2\lim_{b->\infty}\int_0^b(1/s)(-s)e^{-st}dt\\
&=0+0-(1/s^2)\lim_{b->\infty}\Big/_0^b e^{-st}+2(1/s)\lim_{b->\infty}\Big/_0^b e^{-st},
\end{aligned}$$

koska

$$\lim_{x->\infty}\frac{x^a}{e^x}=0$$

Edelleen:

$$F(s) = -(1/s^2)\lim_{b->\infty}(e^{-sb} - e^0) + (2/s)\lim_{b->\infty}(e^{-sb} - e^0)$$

$$= -(1/s^2)(0-1) + (2/s)(0-1)$$

$$= 1/s^2 - 2/s = \underline{\underline{\frac{1-2s}{s^2}}}$$

Tehtävä 1.b

Kuvan mukaan funktio f on:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & kun \quad 0 \le t < 2 \\ 0, & kun \quad t \ge 2 \end{cases} \tag{5}$$

Sovelletaan siis kaavaa 1:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^2 1 \cdot e^{-st}dt + \lim_{b->\infty}\int_2^b 0 \cdot e^{-st}dt$$

$$= (-1/s)\Big/_0^2 e^{-st}dt = (-1/s)(e^{-2s} - 1) = \underline{\underline{\frac{1-e^{-2s}}{s}}}$$

Tehtävä 2.a

Lasketaan ensin:

$$\sin^2 t = [\frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})]^2 = -\frac{1}{4}(e^{it} - e^{-it})^2 = -\frac{1}{4}(e^{2it} - 2 + e^{-2it}) \tag{6}$$

Kaavan 6 ja Laplace-muunnoksen lineaarisuuden perusteella käyttäen eksponenttifunktion sekä vakion Laplace-muunnoksia:

$$L(\sin^2 t) = L(-\frac{1}{4}(e^{2it} - 2 + e^{-2it})) = -\frac{1}{4}(^{s+2i)}\frac{1}{s-2i} - \frac{2}{s} + ^{s-2i)}\frac{1}{s+2i})$$

$$= -\frac{1}{4}(\frac{2s}{s^2+4} - \frac{2}{s}) = \underline{\underline{\frac{1}{2s} - \frac{s}{2s^2+8}}}$$

Tehtävä 2.b

$$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t \tag{7}$$

Ratkaistaan sinitermi kaavasta 7:

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

Nyt käyttäen vakion ja kosinin Laplace-muunnoksia:

$$L(\sin^2 t) = L(\frac{1-\cos(2t)}{2}) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+2^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2s} - \frac{s}{2s^2+8}}}$$

Tehtävä 3.a

Osamurtokehitelmä:

$$\frac{s+5}{(s+1)(s-3)} = {}^{s-3)}\frac{A}{s+1} + {}^{s+1)}\frac{B}{s-3} = \frac{As-3A+Bs+B}{(s+1)(s-3)} = \frac{(A+B)s-3A+B}{(s+1)(s-3)} \qquad (8)$$

Nyt:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A+B=5 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuina:

$$\begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$$

Vihdoin Laplace-käänteismuunnos hyödyntäen kaavaa 8 sekä eksponenttifunktion Laplace-muunnosta käänteiseen suuntaan:

$$L^{-1}(\frac{s+5}{(s+1)(s-3)}) = L^{-1}(\frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s-3}) = \underline{\underline{-e^{-t} + 2e^{3t}}}$$

Tehtävä 3.b

Suoraan käyttäen kosinin ja sini Laplace-muunnoksia käänteiseen suuntaan:

$$L^{-1}\left\{\frac{2s+6}{s^2+4}\right\} = L^{-1}\left\{2\cdot\frac{s}{s^2+2^2} + 3\cdot\frac{2}{s^2+2^2}\right\} = \underline{\underline{2\cos(2t)+3\sin(2t)}}$$

Tehtävä 4.a

Käytetään käänteiseen suuntaan sinin Laplace-muunnosta ja hyödynnetään s-siirtolausetta:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+1^2}\right\} = \underline{\underline{e^t\sin(t)}}$$

Tehtävä 4.b

Lasketaan ensin nimittäjän nollakohdat:

$$s^2 - 2s + 2 = 0 \leftrightarrow (s-1)^2 + 1 = 0 \leftrightarrow (s-1)^2 = i^2 \leftrightarrow s - 1 = \pm i \leftrightarrow s = 1 \pm i \tag{9}$$

Kaavan 9 perusteella:

$$\frac{1}{s^2 - 2s + 2} = \frac{1}{(s-1-i)(s-1+i)} \tag{10}$$

Osamurtokehitelmä kaavalle 10:

$$^{s-1-i)}\frac{A}{s-1-i} + {}^{s-1+i)}\frac{B}{s-1+i} = \frac{As - A + Ai + Bs - B - Bi}{s^2 - 2s + 2}$$

$$= \frac{(A+B)s + (Ai - Bi - A - B)}{s^2 - 2s + 2} \tag{11}$$

Verrataan kaavoja 10 ja 11, saadaan:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ai - Bi - A - B = 1 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuna:

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{2i} \\ B = -\dfrac{1}{2i} \end{cases}$$

Nyt kaavasta 10 kaavan 11 avulla käyttäen eksponenttifunktion Laplace-muunnosta käänteiseen suuntaan:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 2s + 2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1/(2i)}{s-(1+i)} - \frac{1/(2i)}{s-(1-i)}\right\} = \frac{1}{2i}e^{(1+i)t} - \frac{1}{2i}e^{(1-i)t}$$

$$= e^t \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) = \underline{\underline{e^t \sin t}}$$

Tehtävä 5.a

Suoraan Laplace-muunnoksen lineaarisuuden perusteella käyttäen s-siirtolausetta ja vakion sekä kosinin Laplace-muunnoksia:

$$L\{t^2 e^{-2t} - e^{-t}\cos(2t) + 3\} = \frac{2}{(s+2)^3} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} + \frac{3}{s} = \underline{\underline{\frac{2}{(s+2)^3} - \frac{s+1}{s^2 + 2s + 5} + \frac{3}{s}}}$$

Jotta Laplace-muunnos suppenee, saadaan viimeisen termin nimittäjästä vielä ehto:

$$\operatorname{Re} s > 0$$

Tehtävä 5.b

Lasketaan ensin:

$$t\cosh t = t[\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})] = \frac{1}{2}(te^t + te^{-t}) \tag{12}$$

Kaavan 12 perusteella hyödyntäen jälleen Laplace-muunnoksen lineaarisuutta, potenssifuntion Laplace-muunnosta sekä s-siirtolausetta:

$$L\{tcosht\} = L\{1/2(te^t + te^{-t})\}$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2}) = \frac{1}{2}(\frac{s^2 + 2s + 1 + s^2 - 2s + 1}{(s-1)^2(s+1)^2} = \underline{\underline{\frac{s^2+1}{(s-1)^2(s+1)^2}}}$$

Jotta Laplace-muunnos suppenee, saadaan nimittäjän ensimmäisestä termistä vielä ehto:

$$\operatorname{Re} s > 1$$

Tehtävä 6.a

Suoraan s-siirtolauseen avulla sekä potenssifunktion Laplace-muunnosta hyödyntäen:

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{3}{(s+2)^5}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{3}{24}\cdot\frac{4!}{(s-(-2))^5}\right\} = \underline{\underline{\frac{1}{8}e^{-2t}t^4}}$$

Tehtävä 6.b

Jälleen Laplace-muunnoksen lineaarisuutta, s-siirtolausetta sekä kosinin ja sinin Laplace-muunnoksia käyttäen:

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{s+8}{s^2+4s+5}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s+8}{(s+2)^2+1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{6}{(s+2)^2+1^2}\right\}$$

$$= e^{-2t}\cos t + 6s^{-2t}\sin t = \underline{\underline{e^{-2t}(\cos t + 6\sin t)}}$$

Tehtävä 6.c

Lasketaan ensin osamurtokehitelmä:

$$F(s)=\frac{4s}{(s-1)(s+1)^2}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{(s+1)^2} \tag{13}$$

Jatketaan:

$$^{(s+1)^3)}\frac{A}{s-1}+\,^{(s-1)(s+1)^2)}\frac{B}{s+1}+\,^{(s-1)(s+1))}\frac{C}{(s+1)^2}$$

$$=\frac{(s^2+2s+1)A+(Bs-B)(s+1)+Cs-C}{(s-1)(s+1)^2}$$

$$=\frac{(A+B)s^2+(2A+C)s+A-B-C}{(s-1)(s+1)^2} \tag{14}$$

Verrataan kaavoja 13 ja 14, saadaan:

$$\begin{cases} A+B=0 & (1)\\ 2A+C=4 & (2)\\ A-B-C=0 & (3)\end{cases}$$

Yhtälöistä (1) ja (3) saadaan:

$$2A-C=0$$

Lasketaan tämä yhtälön 2 kanssa yhteen, tulos:

$$4A=4\leftrightarrow A=1\rightarrow B=-1\rightarrow C=2A=2$$

Siis:

$$\begin{cases} A=1\\ B=-1\\ C=2\end{cases}$$

Sijoitetaan nämä nyt paikoilleen yhtälöön 13 ja hyödynnetään eksponenttifunktion ja potessifuntion Laplace-muunnosta käänteiseen suuntaan:

$$f(t)=L^{-1}\left\{\frac{4s}{(s-1)(s+1)^2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}+\frac{-1}{s+1}+\frac{2}{(s+1)^2}\right\}$$

$$=\underline{\underline{e^t-e^{-t}+2e^{-t}t}}$$