Mat-1.433/443, Matematiikan peruskurssi K3/P3, syksy 2005
Harjoitus 2. loppuviikko (viikko 38), malliratkaisut, versio 2

Tehtävä 1

a)

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 \\ &= (x+\hat{\imath}y)^3 \\ &= x^3 + 3\hat{\imath}x^2y - 3xy^2 - \hat{\imath}y^3. \end{aligned} \tag{1}$$

eli

$$u(x,y) = \underline{x^3 - 3xy^2} \tag{2}$$

ja

$$v(x,y) = \underline{3x^2y - y^3}. \tag{3}$$

b) **Lause 1 (Kompleksiluvun käänteisluku)** *Kompleksiluvun $w = \xi + \hat{\imath}\eta$ käänteisluku saadaan kaavasta $\frac{1}{\xi+\hat{\imath}\eta} = \frac{\xi-\hat{\imath}\eta}{\xi^2+\eta^2}$. Toisin sanoen: $w^{-1} = \frac{\overline{w}}{|w|^2}$.*

Kun lauseeseen 1 sijoitetaan $\xi = x^2 - y^2$ ja $\eta = 2xy + 1$, saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2+\hat{\imath}} &= \frac{1}{x^2-y^2+\hat{\imath}\,(2xy+1)} \\ &= \frac{x^2-y^2-\hat{\imath}\,(2xy+1)}{(x^2-y^2)^2+(2xy+1)^2} \end{aligned} \tag{4}$$

,

$$u(x,y) = \underline{\frac{x^2-y^2}{(x^2-y^2)^2+(2xy+1)^2}} \tag{5}$$

ja

$$v(x,y) = \underline{\frac{-2xy-1}{(x^2-y^2)^2+(2xy+1)^2}}. \tag{6}$$

Tehtävä 2

Lause 2 (Kompleksisen sinin ja kosinin määritelmät) *Kompleksiset sinin ja kosinin määritelmät ovat*

$$\sin z = \frac{1}{2\hat{\imath}}\left(e^{\hat{\imath}z} - e^{-\hat{\imath}z}\right)$$

ja

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{\hat{\imath}z} + e^{-\hat{\imath}z}\right).$$

Ne vastaavat reaalisia sinejä ja kosineja, jos näiden arvot ratkaistaisiin Eulerin kaavasta.

a) Lauseen 2 perusteella

$$\sin(-z) = \frac{1}{2\hat{\imath}}\left(e^{-\hat{\imath}z} - e^{-\hat{\imath}(-z)}\right) = -\sin z \tag{7}$$

ja

$$\cos(-z) = \frac{1}{2}\left(e^{-\hat{\imath}z} + e^{-\hat{\imath}(-z)}\right) = \cos z \tag{8}$$

koska keskimmäisten kaavojen jälkimmäisissä eksponenttifunktioissa eksponenttien miinusmerkit kumoavat toisensa.

b), vaihtoehto 1: Sinin summakaavasta [1]

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{9}$$

ja kaavoista

$$\cosh x = \cos(\hat{\imath}x) \tag{10}$$

sekä

$$\sinh y = -\hat{\imath}\,\sin(\hat{\imath}y) \tag{11}$$

saadaan

$$\sin z = \sin(x+\hat{\imath}y) = \underline{\sin x\cosh y + \hat{\imath}\cos x\sinh y}. \tag{12}$$

b), vaihtoehto 2: Lauseen 2, Eulerin kaavojen ja hyperbolisten funktioiden kaavojen perusteella on

$$\begin{aligned}
\sin(x+\hat{\imath}y) &= \frac{1}{2\hat{\imath}}\left(e^{\hat{\imath}(x+\hat{\imath}y)} - e^{-\hat{\imath}(x+\hat{\imath}y)}\right) \\
&= \frac{1}{2\hat{\imath}}\left((\cos x + \hat{\imath}\sin x)\,e^{-y} - (\cos x - \hat{\imath}\sin x)\,e^{y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sin x\cdot e^{-y} + \frac{1}{2}\sin x\cdot e^{y} + \frac{1}{2\hat{\imath}}\cos x\cdot e^{-y} - \frac{1}{2\hat{\imath}}\cos x\cdot e^{y} \\
&= \underline{\sin x\cosh y + \hat{\imath}\cos x\sinh y}. \qquad (13)
\end{aligned}$$

Tehtävä 3

Lausutaan integrandi ensin eksponenttifunktion avulla lausetta 2 hyväksikäyttäen:

$$\begin{aligned}
\int_{x=-\pi}^{\pi} \sin mx\,\sin nx\,dx &= \\
\int_{x=-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\hat{\imath}}\left(e^{\hat{\imath}mx} - e^{-\hat{\imath}mx}\right)\frac{1}{2\hat{\imath}}\left(e^{\hat{\imath}nx} - e^{-\hat{\imath}nx}\right)dx &= \\
-\frac{1}{4}\int_{x=-\pi}^{\pi} e^{\hat{\imath}(m+n)x} - e^{\hat{\imath}(m-n)x} - e^{\hat{\imath}(-m+n)x} + e^{\hat{\imath}(-m-n)x}\,dx. & \qquad (14)
\end{aligned}$$

[1] Tämä voidaan johtaa reaalialueella analyyttisen geometrian keinoin johtamalla ensin pistetulon avulla kosinin vähennyslaskukaava ja sitten sinin ja kosinin ominaisuuksiin nojautuen loput summa- ja erotuskulmien kaavoista. Kaavan pätevyys kompleksialueella voidaan tarkastaa laskemalla kaavan (9) molemmat puolet erikseen lauseen 2 avulla ja toteamalla nämä samoiksi.

Lasketaan sitten seuraavanlainen aputulos:

$$\begin{aligned}\int_{x=-\pi}^{\pi} e^{\hat{\imath}kx}\,dx &= \frac{1}{\hat{\imath}k}\left(e^{\hat{\imath}k\pi} - e^{-\hat{\imath}k\pi}\right) \\ &= \frac{1}{\hat{\imath}k}\left((-1)^k - (-1)^k\right) = 0,\ k \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \qquad (15)\end{aligned}$$

mistä seuraa, että kaikki kaavassa (14) esiintyvien termien integraalit häviävät, mikäli $m, n \in \mathbb{Z}$ ja $m \neq \pm n$. Tehtävässä riitti osoittaa vähempi, s.o. että lause pätee kun $m, n \in \mathbb{N}$ ja $m \neq n$, mikä sisältyy edelliseen. □

Tehtävä 4

Lause 3 (Rationaalifunktioiden analyyttisyys) *Rationaalifunktiot ovat analyyttisiä muualla kuin nimittäjän nollakohtien kohdalla. Erityisesti $\frac{1}{z-a}$ on analyyttinen kaikkialla muualla paitsi pisteessä $z = a$.*

Lasketaan

$$f(z) = \frac{2z + \hat{\imath}}{z - \hat{\imath}} = \frac{2z - 2\hat{\imath} + 3\hat{\imath}}{z - \hat{\imath}} = 2 + \frac{3\hat{\imath}}{z - \hat{\imath}} \qquad (16)$$

jolloin siis lauseen 3 nojalla $f(z)$ on analyyttinen kun $z \neq \hat{\imath}$. Lasketaan vielä

$$f'(z) = \frac{-3\hat{\imath}}{(z - \hat{\imath})^2} \qquad (17)$$

ja kun kaavaan (17) sijoittaa $z = -\hat{\imath}$, saadaan

$$f'(-\hat{\imath}) = \frac{-3\hat{\imath}}{(-2\hat{\imath})^2} = \underline{\frac{3}{4}\hat{\imath}}. \qquad (18)$$

Tehtävä 5

a) Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ analyyttisyys joukossa $z \neq 0$ seuraa edellisen kohdan lauseesta 3 suoraan sijoittamalla. Derivaatta taas saadaan potenssifunktion derivointikaavalla

$$f'(z) = \frac{d}{dz}z^{-1} = (-1)z^{-2} = -\frac{1}{z^2} \qquad (19)$$

b) Cauchyn-Riemannin yhtälöt ovat tunnetusti $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, jotka muodostavat välttämättömän ehdon, jotta kompleksifunktio olisi derivoituva. Jos nämä yhtälöt toteutuvat jossakin avoimessa joukossa U, ja jos siinä esiintyvät osittaisderivaatat ovat jatkuvia U:ssa, niin kompleksifunktio $f(z) = u(x, y) + \hat{\imath}v(x, y)$ on analyyttinen U:ssa.

Jaetaan $f(z)$ komponentteihin

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + \hat{\imath}y} = \frac{x - \hat{\imath}y}{x^2 + y^2} \qquad (20)$$

lauseen 1 avulla, jolloin siis

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad (21)$$

ja

$$v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}. \tag{22}$$

Lasketaan osittaisderivaatat osamäärän derivoimiskaavalla

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{w_1(x)}{w_2(x)}\right) = \frac{w_1'(x)w_2(x) - w_1(x)w_2'(x)}{w_2^2(x)} \tag{23}$$

seuraavasti

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1\cdot\left(x^2+y^2\right) - x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\
&= \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad (24)
\end{aligned}$$

(ylimmässä esimerkin vuoksi välivaihe mukana) ja nähdään, että Cauchyn-Riemannin yhtälöt todellakin pätevät. Osittaisderivaatat ovat jatkuvia kun $z \neq 0$.

Funktion $f(z)$ derivaatta laskettaisiin näiden avulla esimerkiksi

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{\imath}\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \hat{\imath}\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\
&= -\frac{\left(x-\hat{\imath}y\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\
&= -\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right)^2 = \underline{-\frac{1}{z^2}} \qquad (25)
\end{aligned}$$

mikä on sama tulos kuin kohdassa (19).

Tehtävä 6

$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ eli $u(x,y) = x^2 + y^2$ ja $v(x,y) = 0$. Osittaisderivaatat ovat siis $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$ ja $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, joten ainoa piste, jossa $f(z)$ on derivoituva on $x = y = 0$ eli $z = 0$. Koska kompleksitasossa ei tämän johdosta ole mitään pistettä, **jolla olisi sellainen ympäristö, jossa $f(z)$ olisi derivoituva**, ei $f(z)$ ole analyyttinen missään.