Mat-1.433/443, Matematiikan peruskurssi K3/P3, syksy 2005
Harjoitus 2. alkuviikko (viikko 39), malliratkaisut, versio 1.1

Tehtävä 1

Lause 1 (Hyperbolisen kosinin summakaava) *Hyperbolisen kosinin summakaava on*

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2. \tag{1}$$

Tämä on mahdollista johtaa kosinin summakaavasta ja todistaa lausumalla kaavan (1) molemmat puolet eksponenttifunktion avulla.

a)

$$\begin{aligned} \cos(1 + 2\hat{\imath}) &= \cos 1 \cos(2\hat{\imath}) - \sin 1 \sin(2\hat{\imath}) \\ &= \underline{\cos 1 \cosh 2 - \hat{\imath} \sin 1 \sinh 2}. \end{aligned} \tag{2}$$

b)

$$\sin \hat{\imath}\pi = \underline{\hat{\imath} \sinh \pi}. \tag{3}$$

c) Lauseen 1, kosinin parillisuuden ja sinin parittomuuden perusteella

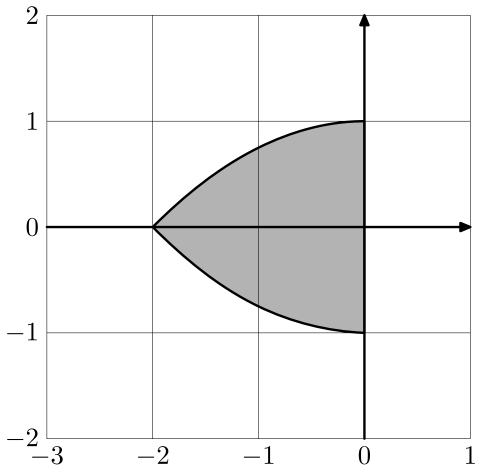
$$\begin{aligned} \cosh(-3 - 6\hat{\imath}) &= \cosh(3 + 6\hat{\imath}) \\ &= \cosh 3 \cosh(6\hat{\imath}) + \sinh 3 \sinh(6\hat{\imath}) \\ &= \cosh 3 \cos(-6) - \hat{\imath} \sinh 3 \sin(-6) \\ &= \underline{\cosh 3 \cos 6 + \hat{\imath} \sinh 3 \sin 6}. \end{aligned} \tag{4}$$

Vaihtoehtoisesti (huomaa sopiva termien uudelleenjärjestely)

$$\begin{aligned} \cosh(-3 - 6\hat{\imath}) &= \frac{1}{2}\left(e^{-3-6\hat{\imath}} + e^{3+6\hat{\imath}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{3}e^{6\hat{\imath}} + e^{-3}e^{-6\hat{\imath}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{3}(\cos 6 + \hat{\imath}\sin 6) + e^{-3}(\cos 6 - \hat{\imath}\sin 6)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{3} + e^{-3}\right)\cos 6 + \frac{1}{2}\hat{\imath}\left(e^{3} - e^{-3}\right)\sin 6 \\ &= \underline{\cosh 3 \cos 6 + \hat{\imath} \sinh 3 \sin 6}. \end{aligned} \tag{5}$$

Tehtävä 2

Lause 2 (Konformikuvaus) *Konformikuvaus on kuvaus $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, joka säilyttää paikalliset kulmat. Analyyttinen funktio on konforminen kaikissa pisteissä, joissa sillä on olemassa nollasta eriävä derivaatta. Vastaavasti mikä tahansa konformikuvaus, jolla on jatkuvat osittaisderivaatat, on analyyttinen.*



Kuva 1: Tehtävän 2 kuvaus maaliavaruudessa. Huomaa suorat kulmat pisteissä $(0, 1)$, $(0, -1)$ ja $(-2, 0)$.

$$\begin{aligned} w = \hat{\imath} z^2 &= \hat{\imath}\left(x^2 - y^2 + 2\hat{\imath}xy\right) \\ &= -2xy + \hat{\imath}\left(x^2 - y^2\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Reunojen kuvaajat ovat siis parametrimuodossa

$$\begin{aligned} (t, 0) &\rightarrow \left(0, t^2\right) \\ (0, t) &\rightarrow \left(0, -t^2\right) \\ (t, 1) &\rightarrow \left(-2t, t^2 - 1\right) \\ (1, t) &\rightarrow \left(-2t, 1 - t^2\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Kaikissa näistä $t \in [0, 1]$.

$w'(z) = 2\hat{\imath}z$, joten lauseen 2 perusteella w on konforminen kaikkialla muualla paitsi origossa. Asia ilmenee siten, että suora kulma kuvautuu origossa oikokulmaksi, mutta muut kolme suoraa kulmaa säilyvät maaliavaruuden pisteissä $(0, 1)$, $(0, -1)$ ja $(-2, 0)$. Ks. kuvaa 1.

Tehtävä 3

Sini: Sinin summakaavasta seuraa (ks. edellistä harjoitusta), että $\sin z = \sin x \cosh y + \hat{\imath} \cos x \sinh y$. Pätee siis $u(x, y) = \sin x \cosh y$ ja $v(x, y) = \cos x \sinh y$. Osittaisderivaatat ovat vastaavasti $u_x = v_y = \cos x \cosh y$ ja $u_y = -v_x = \sin x \sinh y$, jotka kaiken lisäksi ovat jatkuvia. Sinifunktio on siis analyyttinen kaikkialla (ks. nytkin edellistä harjoitusta). Lasketaan vielä $u_x + \hat{\imath} v_x = \cos x \cosh y - \hat{\imath} \sin x \sinh y = \cos z$.

$\sin z$ ei ole konforminen kun $\cos z = 0$, eli kun $\underline{z = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}}$.

Kosini: Kosinille vastaavat u ja v ovat $u(x, y) = \cos x \cosh y$ ja $v(x, y) = -\sin x \sinh y$. Pätee $u_x = v_y = -\sin x \cosh y$ ja $u_y = -v_x = \cos x \sinh y$, jotka samoin ovat jatkuvia, joten kosinikin on analyyttinen kaikkialla. Lasketaan vielä edellisen tapaan $u_x + \hat{\imath} v_x = -\sin x \cosh y - \cos x \sinh y = -\sin z$. $\square$

Tehtävä 4

Haetaan toisen kertaluvun derivaattoja

$$
\begin{aligned}
u(x, y) &= \sin x \cosh y \\
u_x &= \cos x \cosh y \\
u_{xx} &= -\sin x \sinh y \\
u_y &= \sin x \sinh y \\
u_{yy} &= \sin x \sinh y \\
\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} &= 0 \qquad (8)
\end{aligned}
$$

ja nähdään, että u on harmoninen.

Haetaan u:lle *liittoharmoninen* v, jonka on tarkoitus täyttää u:n kanssa Cauchyn-Riemannin kaavat:

$$
\begin{aligned}
v_y &= \cos x \cosh y \\
v(x, y) &= \int \cos x \cosh y \; dy \\
&= \cos x \sinh y + \alpha(x) \\
v_x &= -\sin x \sinh y + \alpha'(x) \\
\alpha'(x) &= 0 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

α on siis reaalinen vakio. Huomaa kuitenkin se, että integroitaessa y:n suhteen piti siinä vaiheessa "integroimisvakioksi" ottaa mielivaltainen x:n funktio! Edellisen tehtävän ja edellisten harjoitusten perusteella saadaan lopulta $f(z) = \sin x \cosh y + \hat{\imath} \cos x \sinh y + \hat{\imath}\alpha = \underline{\sin z + \hat{\imath}\alpha}$, missä $\alpha \in \mathbb{R}$.

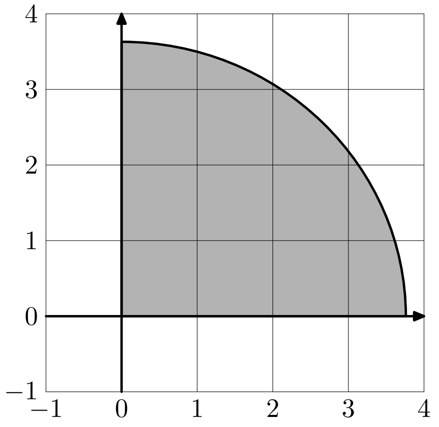
Mikäli tämä seikka ei etukäteen olisi ollut tiedossa, olisi voitu nojautua siihen, että reaalisille x olisi ollut $f(x) = \sin x \cosh 0 + \hat{\imath} \cos x \sinh 0 + \hat{\imath}\alpha = \sin x \cdot 1 + \hat{\imath} \cos x \cdot 0 + \hat{\imath}\alpha = \sin x + \hat{\imath}\alpha$ ja tästä olisi $f(z)$ saatu jatkamalla analyyttisesti koko kompleksitasoon.

Tehtävä 5

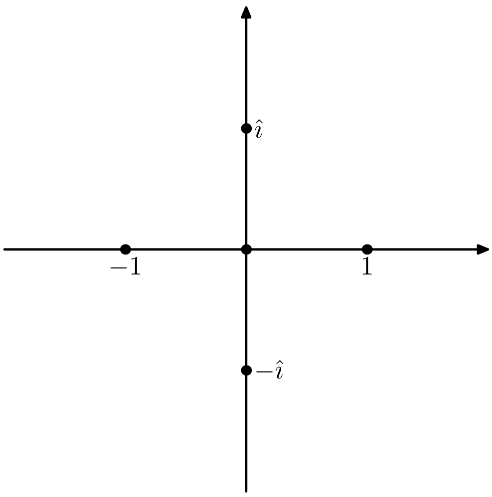
Tehdään samantapaiset parametriesitykset kuin tehtävässä 2. Hyödynnetään myös tehtävän 3 kaavaa kompleksiluvun sinille ja saadaan

$$
\begin{aligned}
(x, 0) &\to (\sin x, 0) && (10) \\
(0, y) &\to (0, \sinh y) && (11) \\
(x, 2) &\to (\sin x \cosh 2, \cos x \sinh 2) && (12) \\
\left(\frac{\pi}{2}, y\right) &\to (\cosh y, 0)\,. && (13)
\end{aligned}
$$

Tässä siis $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ja $y \in (0, 2)$. Huomataan, että (10), (11) ja (13) kuvaavat suoria viivanpätkiä kun sen sijaan (12) on osa ellipsin kaarta. Samoin voidaan todeta, että muut suorat kulmat kuvautuvat suoriksi kulmiksi paitsi $(\frac{\pi}{2}, 0)$, joka kuvautuu maaliavaruudessa pisteessä $(1, 0)$ olevaksi oikokulmaksi. Ks. kuvaa 2.



Kuva 2: Tehtävän 5 kuvaus maaliavaruudessa. Huomaa suorat kulmat pisteissä $(0,0)$, $(\cosh 2, 0)$ ja $(0, \sinh 2)$.



Kuva 3: Tehtävän 6 epäkonformisuuspisteet. Origossa kuvaus ei ole edes analyyttinen.

Tehtävä 6

$f(z) = z^2 + \frac{1}{z^2} = z^2 + z^{-2}$, joten

$$f'(z) = 2z - 2z^{-3} = 2z - \frac{2}{z^3} = \frac{2\left(z^4 - 1\right)}{z^3}. \tag{14}$$

$f(z)$ ei ole analyyttinen origossa ja vastaavasti pisteissä $z = \{\pm 1, \pm \hat{\imath}\}$ sijaitsevat derivaatan nollakohdat, joten $f(z)$ ei siis ole konforminen mainituissa viidessä pisteessä. Ks. kuvaa 3.

Lasketaan vielä

$$\begin{aligned} w = f(r\,e^{\hat{\imath}\varphi}) &= r^2\,e^{2\hat{\imath}\varphi} + r^{-2}e^{-2\hat{\imath}\varphi} \\ &= r^2\left(\cos 2\varphi + \hat{\imath}\sin 2\varphi\right) + r^{-2}\left(\cos 2\varphi - \hat{\imath}\sin 2\varphi\right) \\ &= r^2\cos 2\varphi + r^{-2}\cos 2\varphi + \hat{\imath}\left(r^2\sin 2\varphi - r^{-2}\sin 2\varphi\right) \\ &= \left(r^2 + r^{-2}\right)\cos 2\varphi + \hat{\imath}\left(r^2 - r^{-2}\right)\sin 2\varphi \end{aligned} \tag{15}$$

eli käyrät ovat origokeskisiä ellipsejä kun $r \in \mathbb{R}_+$ on vakio. Jos $r = 1$, litistyy ellipsi viivaksi. Jos sen sijaan $r \to 0+$ tai $r \to \infty$, lähestyy kuvaaja asymptoottisesti yhä suurenevaa r^{-1} tai r-säteistä ympyrää.