K3/P3 2005 laskuharjoituksen 1 malliratkaisut

Alkuviikko 38

1. A1 a) Kirjoitetaan $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

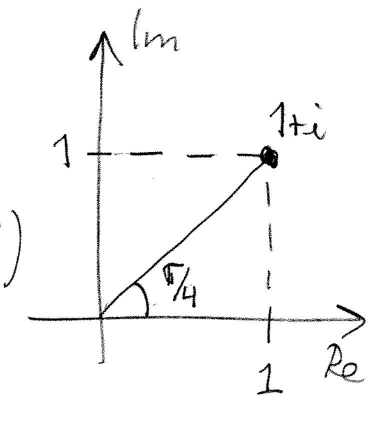
$$= e^2(\underbrace{\cos 3\pi}_{=\cos \pi = -1} + i \underbrace{\sin 3\pi}_{=\sin \pi = 0}) = \underline{\underline{-e^2}}$$

$$|e^z| = e^2.$$

b) $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\mathrm{Arg}\,(1+i) = \frac{\pi}{4}$ (ks. edellisen loppuviikon tehtävä 3)

$$\underline{\underline{1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}}}$$



c) $$\left|\sqrt[4]{-i}\right| = \sqrt[4]{\underbrace{|-i|}_{=1}} = 1$$

$$\arg \sqrt[4]{-i} = \frac{\arg -i + n \cdot 2\pi}{4} = \frac{-\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi}{4} = -\frac{\pi}{8} + n\frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt[4]{-i} = \underline{\underline{e^{i\frac{\pi}{8} + n\frac{\pi}{2}}}} \quad n \in \mathbb{Z}$$ (jo $n \in \{0,1,2,3\}$ antaa kaikki eri arvot)

K3/P3 2005 1. alkuviikko (viikko 38)

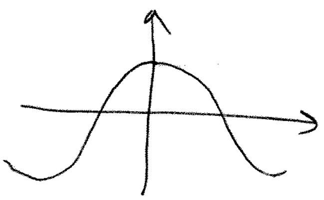
1. A2

Olkoon taas $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

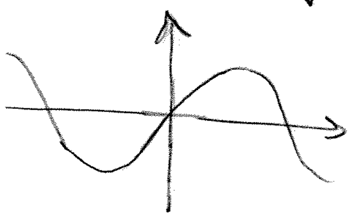
a) $\overline{(e^z)} = \overline{e^{x+iy}} = \overline{e^x(\underbrace{\cos y}_{\in\mathbb{R}} + i \underbrace{\sin y}_{\in\mathbb{R}})} = e^x(\underbrace{\cos y}_{=\cos -y} - i \underbrace{\sin y}_{=-\sin -y})$

$= e^x(\cos -y + i \sin -y)$

$= e^{x-iy} = e^{\overline{z}}$ $\square$

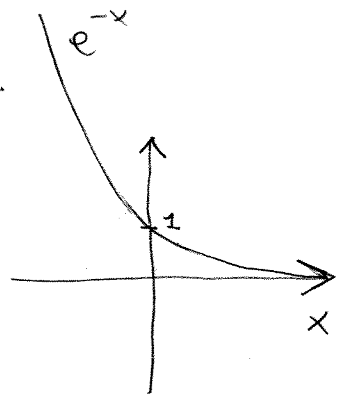


$\cos -y = \cos y$



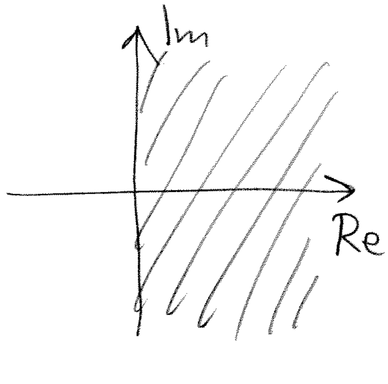
$\sin -y = \sin y$

b) $|e^{-z}| = |e^{-x}| \underbrace{|\cos -y + i \sin -y|}_{= \sqrt{\underbrace{\cos^2 -y + \sin^2 -y}_{=1}}} = e^{-x} < 1$



$\Leftrightarrow \quad x > 0$

eli $\underline{\underline{\operatorname{Re} z > 0}}$



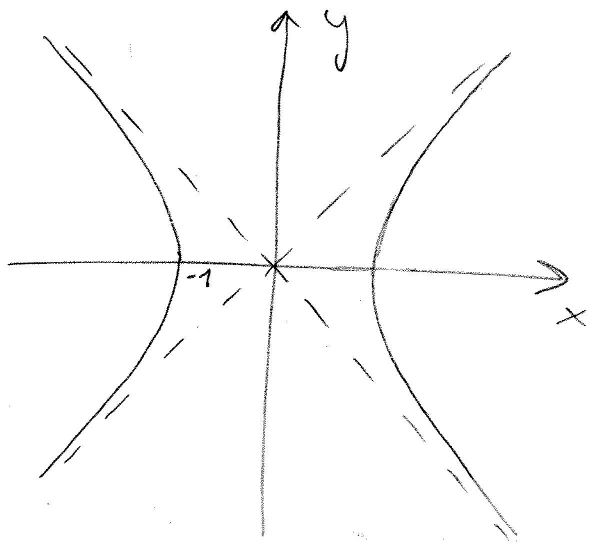
K3/P3 2005

1.A3

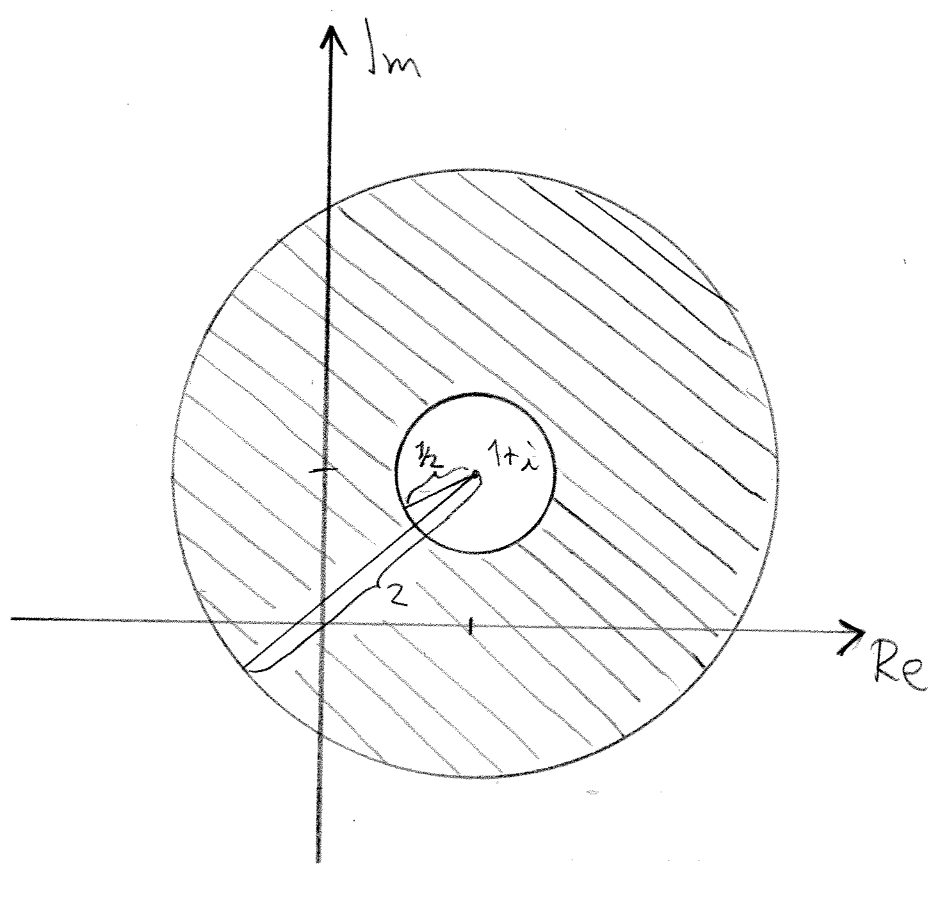
Olkoon $z = re^{i\varphi} = x + iy$, $r > 0$, $-\pi < \varphi \le \pi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $Re(z^2) = Re(x^2 - y^2 + 2ixy)$

$= \underline{\underline{x^2 - y^2 = 1}}$ Hyperbeli



b)



$|z - i - 1|$ on

zin etäisyys

pisteestä $1+i$

K3/P3 2005

1. A3...

c) $\operatorname{Im}\frac{i}{z} = \operatorname{Im}\frac{i\bar{z}}{z\bar{z}} = \operatorname{Im}\frac{ix-y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} \leq 2$

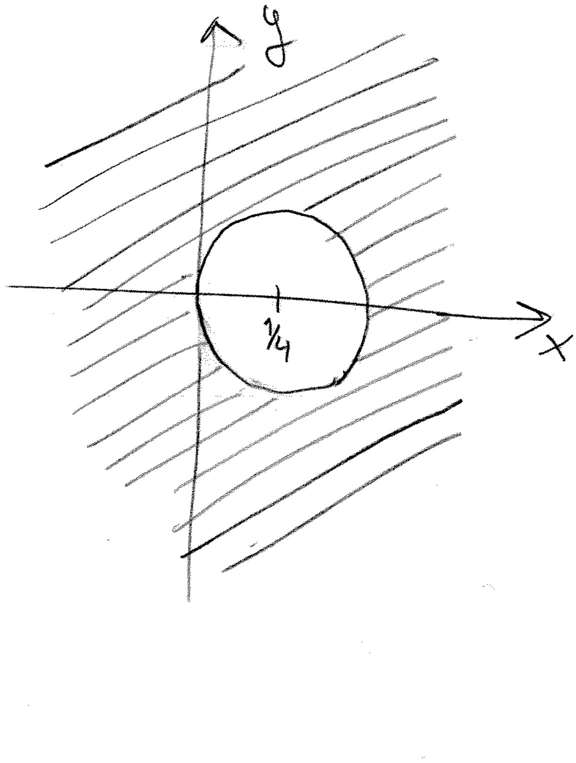
$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} \leq x^2+y^2$

Täydennetään neliöiksi:

$$x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + y^2 \geq \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$\Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + (y-0)^2 \geq \left(\frac{1}{4}\right)^2$

Kysytty alue on siis sen ympyrän ulkopuoli, jonka keskipiste on $\left(\frac{1}{4},0\right) \triangleq \frac{1}{4}+0i$ ja säde $\frac{1}{4}$.



(Haluttaessa voidaan palata kompleksinotaatioon:

$\left|z-\frac{1}{4}\right| \geq \frac{1}{4}$.)

K3/P3 2005

1.A3... d) $|z-i|+|z+i|=4$

Ellipsi, jonka polttopisteet ovat i ja $-i$,

keskipiste siis niiden puolivälissä eli pisteessä 0.

Mitkä ovat ellipsin isoakseli (halkaisija polttopisteiden kautta kulkevan suoran (Im-akseli) suunnassa ja pikkuakseli (halkaisija sitä vastaan kohtisuoraan)?

Isoakseli: Selvästi piste $2i$ on käyrällä:

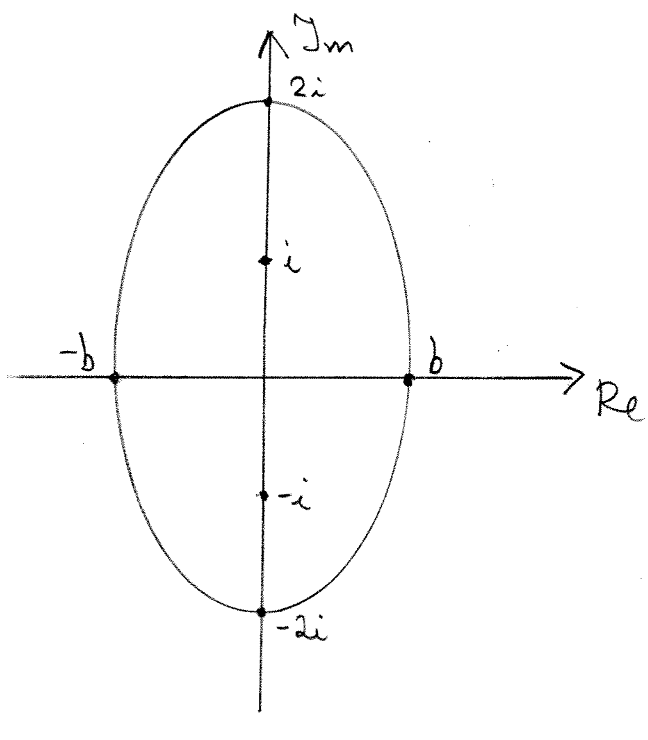
$$|2i-i|+|2i+i|=1+3=4.$$

Symmetrian mukaan niin on myös piste $-2i$!

Entä pikkuakseli?

Merkitään b:llä ellipsin ja reaaliakselin leikkauspistettä.

(Samaa menetelmää olisi voinut käyttää myös isoakselin kohdalla, ellei sitä olisi hätäilty suoraan.)



1. A3...

K3/P3 2005

d...)

Yhtälöstä saadaan

$$\underbrace{|b-i|}_{=\sqrt{b^2+1}}+\underbrace{|b+i|}_{=\sqrt{b^2+1}} = 4 \Rightarrow \sqrt{b^2+1} = 2$$

$$\Rightarrow b^2+1 = 4$$

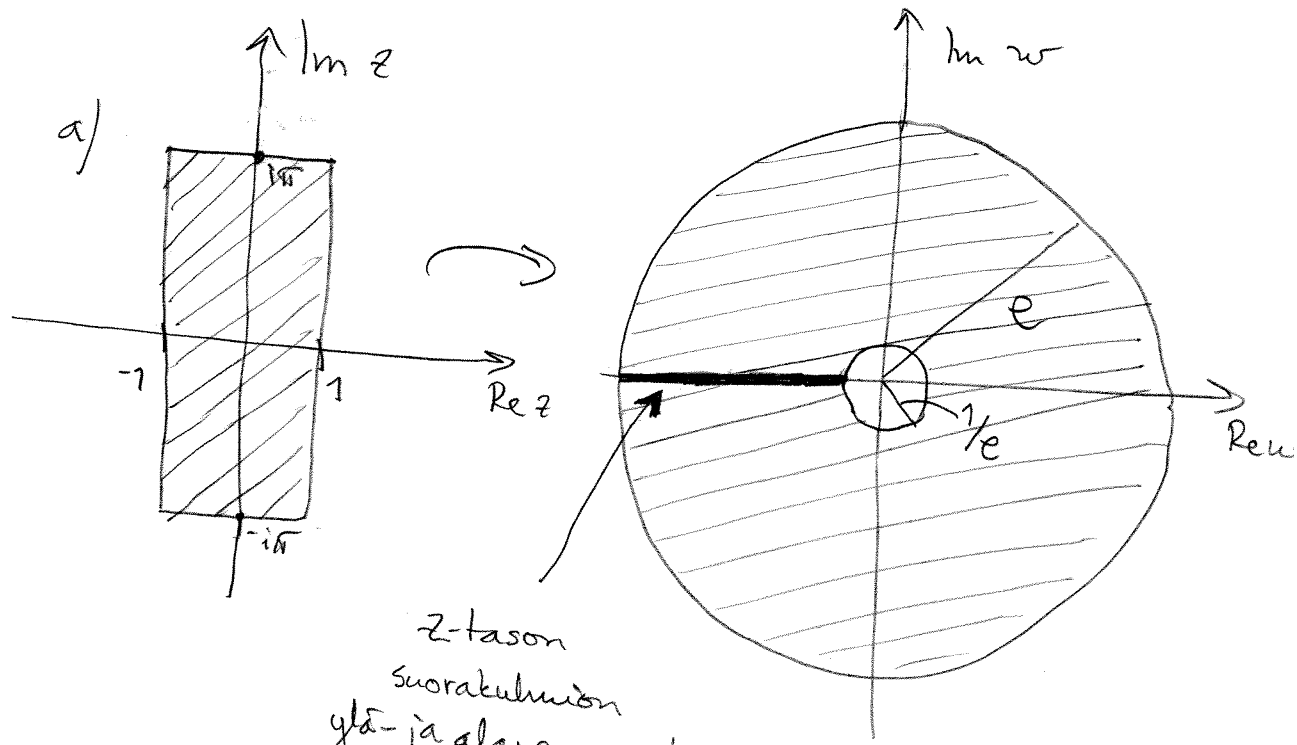
$$\Rightarrow b = \sqrt{3}.$$

(Iso- ja pikkuakselin voisi kai näkdä ellipsin kaavasta suoraankin, mutta minä en muistanut, miten. Ei ollut paha laskea.)

K3/P3 2005

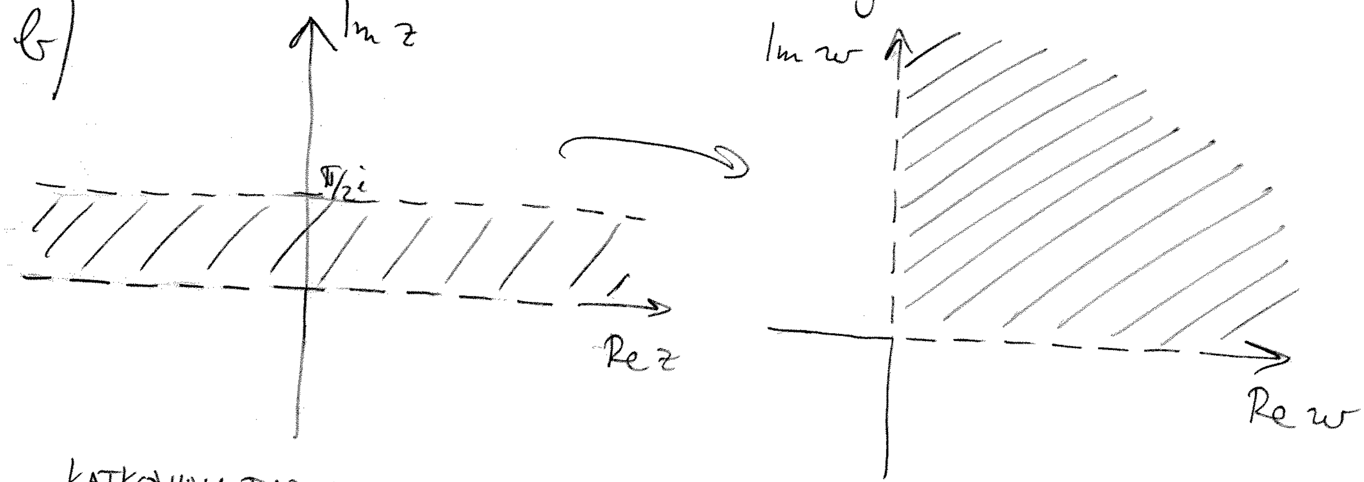
1. A4

a)



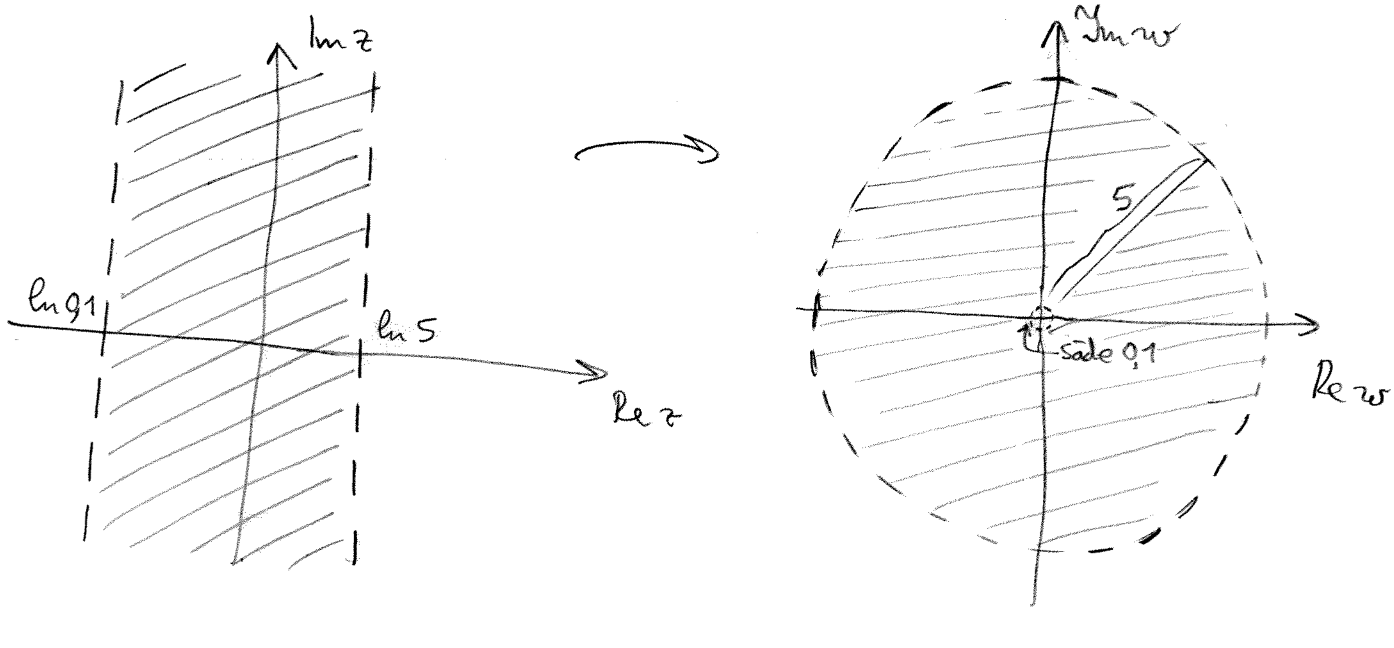
z-tason suorakulmion ylä- ja alareuna kuvautuvat molemmat tälle janalle

b)



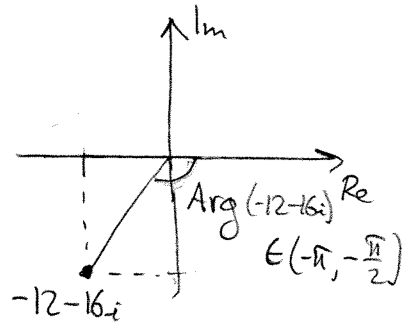
KATKOVIIVA TARKOITTAA NÄISSÄ KUVISSA, ETTÄ REUNA EI KUULU ALUEESEEN

c)

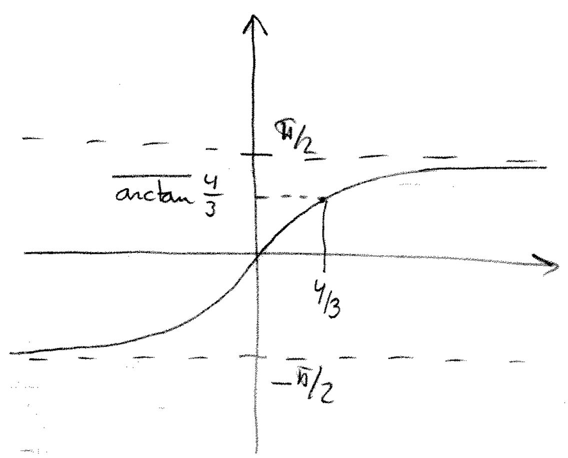


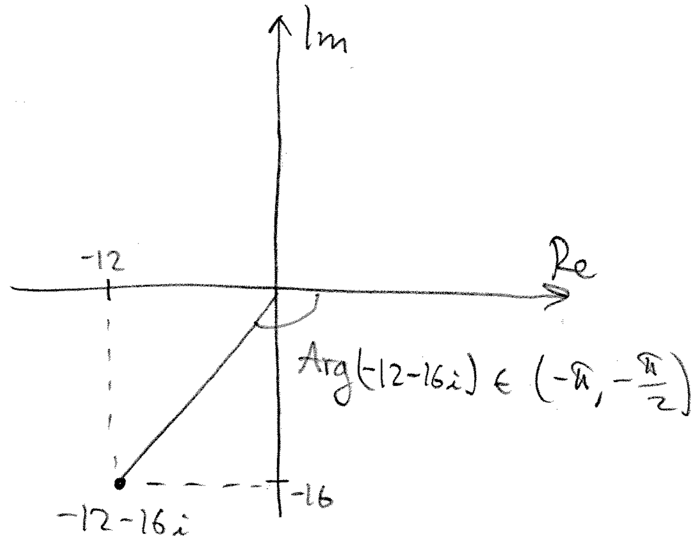
K3/P3 2005

1.A5 a) $\mathrm{Log}(-5) = \ln 5 + i\pi$



b) $$\mathrm{Log}(-12-16i) = \ln\sqrt{\underbrace{12^2+16^2}_{=144+256=400}} + \underbrace{i\,\arctan\frac{4}{3}}_{\in(0,\frac{\pi}{2})} - i\pi$$



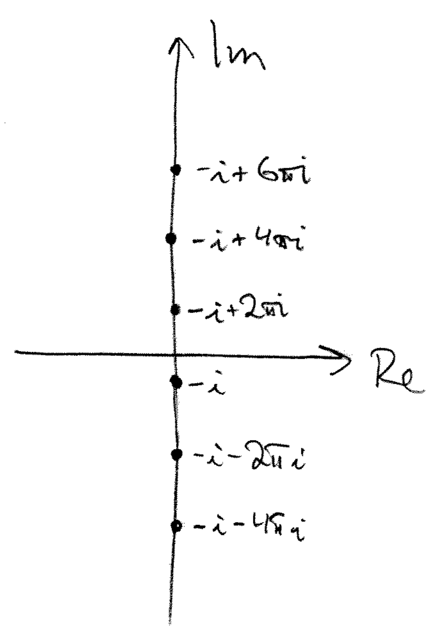


$$= \ln 20 + i\,\arctan\frac{4}{3} - i\pi \quad (\approx 2{,}9957 - 2{,}2143i)$$

c) $e^{-i} = \cos -1 + i \sin -1 \qquad |e^{-i}| = 1$

$$\log e^{-i} = \underbrace{\ln 1}_{=0} + \underbrace{i\,\arctan\left(\underbrace{\frac{\sin -1}{\cos -1}}_{\tan -1}\right)}_{=-1} + n\cdot 2\pi i$$

$$= i(-1 + n\cdot 2\pi i)$$



K3/P3 2005

1. A6