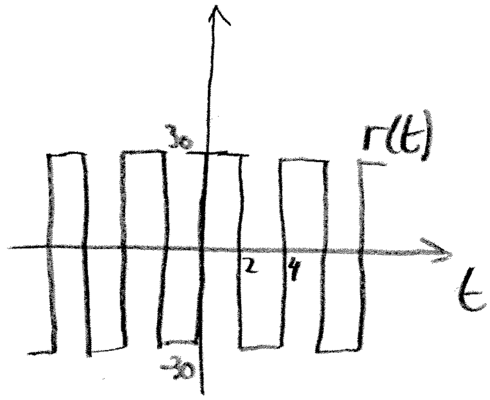
K3/P3 syksy 2005 11AV malliratkaisut

**11.A1**
$$\begin{cases} y''(t)+\omega^2 y(t) = r(t) \\ y(0)=0 \end{cases}$$




Kirjoitetaan sekä $y(t)$ että $r(t)$ Fourier-sarjaksi.

$$r(t) = \begin{cases} 30, & 0<t<2 \\ -30, & 2<t<4 \end{cases}$$

$L=2$ (puolet jakson pituudesta) 4-jaksoinen

$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{2}$$

$$r(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\frac{n\pi t}{2}$$

$$A_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} r(t)\,dt = 0 \qquad A_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \underbrace{\underbrace{r(t)}_{\text{PARITON}}\underbrace{\cos\frac{n\pi t}{2}}_{\text{PARILLINEN}}}_{\text{PARITON}}\,dt = 0$$

$$B_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} r(t)\sin\frac{n\pi t}{2}\,dt = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-2}^{0} -30\sin\frac{n\pi t}{2}\,dt}_{} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{0}^{2} 30\sin\frac{n\pi t}{2}\,dt}_{\text{SAMOIN}} = \begin{cases} \frac{120}{n\pi}, & n \text{ pariton} \\ 0, & n \text{ parillinen} \end{cases}$$

$$= \Big/_{-2}^{0} \frac{30\cdot 2}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{2} = \frac{60}{n\pi}\Big[\underbrace{\cos 0}_{=1} - \underbrace{\cos n\pi}_{=(-1)^n}\Big] = \begin{cases} \frac{120}{n\pi}, & n \text{ pariton} \\ 0, & n \text{ parillinen} \end{cases}$$

11.A1... Sijoitetaan differentiaaliyhtälöön:

$$\omega^2 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\omega^2 - \frac{n^2\pi^2}{4}\right) a_n \cos\frac{n\pi t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\omega^2 - \frac{n^2\pi^2}{4}\right) b_n \sin\frac{n\pi t}{2}$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pariton}}}^{\infty} \frac{120}{n\pi} \sin\frac{n\pi t}{2}$$

HUOM. $\omega = 3$

$\Rightarrow \omega^2 - \frac{n^2\pi^2}{4} = 9 - n^2\frac{\pi^2}{4}$

$\neq 0$ millään $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\Rightarrow \quad a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{kun } n \text{ on parillinen} \\ \dfrac{\frac{120}{n\pi}}{9 - \frac{n^2\pi^2}{4}} = \dfrac{120}{n\pi}\dfrac{4}{36 - n^2\pi^2} = \dfrac{480}{n\pi(36-n^2\pi^2)} & \text{kun } n \text{ pariton} \end{cases}$$

Siis $$y(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pariton}}}^{\infty} \frac{480}{n\pi(36-n^2\pi^2)} \sin\frac{n\pi t}{2}$$

RATKAISU TOTEUTTAA ALKUEHDON $y(0) = 0$.

(ERI ALKUEHDON TOTEUTTAVAA RATKAISUA EI TÄLLÄ MENETELMÄLLÄ SAATAISIKAAN.)

Dominoiva komponentti: $|b_n|$ on suurin, kun $n\pi(36 - n^2\pi^2) \approx 0$

eli kun $n^2 \approx \frac{36}{\pi^2} \approx 3{,}648$ tai kun $n \approx 0$. Katsotaan ensimm. termejä:

$$y(t) = \underbrace{5{,}847 \sin\frac{\pi t}{2}}_{\text{DOMINOIVA KOMPONENTTI}} - 0{,}964 \sin\frac{3\pi t}{2} - 0{,}145 \sin\frac{5\pi t}{2} - 0{,}0488 \sin\frac{7\pi t}{2} - \ldots$$

## 11.A2

$$u_1(x,t) := e^{-\pi^2c^2t}\sin(\pi x) \qquad u_3(x,t) := e^{-9\pi^2c^2t}\sin(3\pi x)$$

$$u(x,t) := 4u_1(x,t) - \frac{1}{3}u_3(x,t)$$

Toteuttavat lämpöyhtälön:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_1 - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1 = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{-\pi^2c^2t}\right)}_{=-\pi^2c^2e^{-\pi^2c^2t}}\sin(\pi x) - c^2e^{-\pi^2c^2t}\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin(\pi x)\right)}_{=-\pi^2\sin(\pi x)} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_3 - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_3 = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{-9\pi^2c^2t}\right)}_{=-9\pi^2c^2e^{-\pi^2c^2t}}\sin(3\pi x) - c^2e^{-9\pi^2c^2t}\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin(3\pi x)\right)}_{=-9\pi^2\sin(3\pi x)} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u = 4\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{1}{3}\frac{\partial u_3}{\partial t} - c^2\left[4\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{3}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}\right]$$

$$= 4\underbrace{\left[\frac{\partial u_1}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right]}_{=0} - \frac{1}{3}\underbrace{\left[\frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}\right]}_{=0} = 0$$

Reunaehdot:

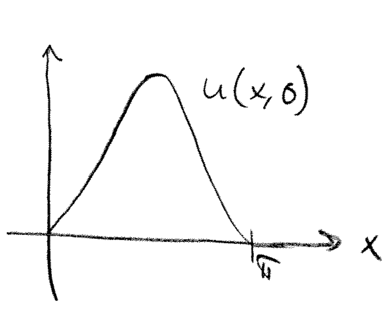
$$u_1(0,t) = e^{-\pi^2c^2t}\sin 0 = 0 \qquad u_3(0,t) = e^{-9\pi^2c^2t}\sin 0 = 0$$

$$u(0,t) = 4\underbrace{u_1(0,t)}_{=0} - \frac{1}{3}\underbrace{u_3(0,t)}_{=0} = 0$$

$$u_1(1,t) = e^{-\pi^2c^2t}\sin\pi = 0 \qquad u_3(1,t) = e^{-9\pi^2c^2t}\sin 3\pi = 0$$

$$u(1,t) = 4\underbrace{u_1(1,t)}_{=0} - \frac{1}{3}\underbrace{u_3(1,t)}_{=0} = 0$$


$$u(x,0) = 4\sin(\pi x) - \frac{1}{3}\sin(3\pi x)$$



Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka

Apiola/Bingham

**Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3 syksy 2005**
`http://math.tkk.fi/teaching/k3/`

**Laskuharjoitus 11** (viikko 49, 5.–9.12.2005) **Ratkaisuja**

## Alkuviikko

3. Ratkaise $\pi$:n pituista sauvaa koskeva lämpöyhtälö $u_t = u_{xx}$ ($c^2 = 1$), kun sauvan päät "upotetaan jäihin" (eli pidetään $0°C$:ssa) ja alkulämpötilajakauma on $f(x) = 50\sin x - 6\sin 2x + 8\sin 5x$.

   Suorita tehtävä käymällä muuttujanerotteluprosessi alusta alkaen läpi. (Ei tarvitse käyttää aikaa "sen erään vakion" negatiivisuusperusteluun.) Fourier-sarjaksi ei tarvitse kehittää, kun alkulämpötilajakauma on aika sopivaa muotoa.

---

**Ratkaisu**

Muuttujien erottelu-yrite: $u(x,t) = F(x)G(t)$ sijoitetaan lämpöyhtälöön $u_t = u_{xx} \implies \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$. Jotta tämä olisi mahdollista, on kummankin puolen oltava sama vakio $-p^2$. (Jos vakio olisi $\geq 0$, ei saataisi reunaehtoja toteutumaan. (Tätä ei tehtävässä tarvinnut tarkemmin näperrellä.)

Näin yhtälö hajoaa kahdeksi tavalliseksi diffyhtälöksi:

(x) $\quad F''(x) + p^2F(x) = 0$
(t) $\quad G'(t) + p^2G(t) = 0.$

**x-yhtälö**: Suoraan sinin ja kosinin derivoimiskaavoista nähdään, että yleinen ratkaisu on $F(x) = A\cos px + B\sin px$. (Voitaisiin muodostaa karakteristinen yhtälö $\lambda^2 + p^2 = 0 \implies p = \pm i$, josta tehtäisiin sama johtopäätös, mutta helpompi "nähdä" suoraan.)

RE:t $u(0,t) = 0, \quad u(0,\pi) = 0$. Koska $u(0,t) = F(0)G(t)$, ja vaadimme, että $G(t) \neq 0$ jollain $t$:n arvolla. (Muutenhan saataisiin pelkkä 0–funktio, josta emme ole kiinnostuneita, sehän toteuttaa lämpöyhtälön ja RE:t, mutta ei alkuehtoa, ellei sekin ole 0, jolloin mitään ei tapahdu, ja ketään ei kiinnosta!) Siis $F(x)$:lle saadaan reunaehdot: $F(0) = 0, \quad F(\pi) = 0$. Edellisestä seuraa: $A = 0$, jonka jälkeen jälkimmäisestä: $\sin p\pi = 0 \implies p = n$ (kokonaisluku). Samme funktiot $F_n(x) = \sin nx$, jotka toteuttavat (x)-yhtälön ja reunaehdot. (Voisimme ottaa kuhunkin mielivaltaisen vakion $B_n$, mutta otamme tarvittavat vakiot mukaan myöhemmin.)

**t-yhtälö**: exp-funktion derivoimiskaavasta saadaan heti ratkaisut $G(t) = e^{-p^2t} = e^{-n^2t} = G_n(t)$. (merk.)

**Alkuehto**. Funktiot $u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t)$ toteuttavat lämpöyhtälön ja reunaehdot, samoin niiden mielivaltainen lineaarikombinaatio, koska lämpöytälö on lineaatrinen ja RE:t ovat 0-arvoisia. (Tässä ne mielivaltaiset vakiot otetaan peliin.) Koska $G_n(0) = 1$, on valittava sellainen lineaarikombinaatio $u(x,t) = \sum_n b_n u_n(x,t)$, jolle $\sum_n b_n F_n(x) = 50\sin x - 6\sin 2x + 8\sin 5x$.

Tämä toteutuu, kun valitaan $u(x,t) = 50e^{-t}\sin x - 6e^{-4t}\sin 2x + 8e^{-25t}\sin 5x$.

Sijoita $t = 0$, niin varmasti näet. Huomaa, että kun alkuehto on valmiiksi oikean jaksoinen lineaarikombinaatio sineistä, niin Fourier-sarjaa ei tarvita!

Seuraava askel ratkaisusprosessissa on se, jolloin näin ei ole. Siitä johdutaan luontevasti Fourier-sarjoihin, mutta se ei kuulu tämän tehtävän piiriin.

4. Kuparisauva ($c^2 = 1.14$), jonka pituus $L = 10$ cm upotetaan kiehuvaan veteen, kunnes sen lämpötila on kauttaaltaan $100°C$. Hetkellä $t = 0$ sauva otetaan vedestä, lämpöeristetään täydellisesti pituussuunnassa ja sen päät työnnetään jäävesisäiliöihin $0°C$.

   Muodosta sauvan lämpötilafunktio $u(x,t)$.

   Arvioi sarjan ensimmäistä termiä käyttäen, kuinka pitkän ajan $t_1$ kuluttua sauvan maksimilämpötila (keskipisteen lämpötila) on pudonnut puoleen.

---

Lämpöyhtälö: $u_t = c^2u_{xx}$., RE:t: $u(0,t) = u(L,t) = 0 (L = 10), AE: u(x,0) = 100$

Menee standardityyliin, nyt ei enää jauheta samoja vaiheita, vaan käytetään yleistä kaavaa.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,t),$$

missä $u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n^2 t}$, $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ ja $b_n$ on AE-funktion $f(x) = 100$ $2L-$ jaksoisen sinisarjan kerroin: $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L 100\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{200}{n\pi}(1-(-1)^n)$.

Siis:

$$u(x,t) = \frac{400}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right)e^{-\lambda_n^2 t}.$$

**"Puoliintumisaika"**

$50 = u_1(5,t_1) = \frac{400}{\pi}\sin\frac{\pi x}{L}e^{-\lambda_1^2 t_1} \implies t_1 = \frac{\ln\frac{8}{\pi}}{\lambda_1^2} \approx 8,308.$