K3/P3 syksy 2005 10 AV laskareiden mallivastaukset

10.A1

$$y' = t + y =: f(t,y) \qquad y(0) = 1 =: y_0, \quad h = 0{,}1$$

1. askel: $k_1 = h f(t_0, y_0) = 0{,}1(0+1) = 0{,}1$

$k_2 = h f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) = 0{,}1(0 + 0{,}05 + 1 + 0{,}05) = 0{,}11$

$k_3 = h f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}) = 0{,}1(0 + 0{,}05 + 1 + 0{,}055) = 0{,}1105$

$k_4 = h f(t_0 + h, y_0 + k_3) = 0{,}1(0 + 0{,}1 + 1 + 0{,}1105) = 0{,}12105$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}66205 = 1{,}110341667$

$t_1 = t_0 + h = 1{,}1$

2. askel: $k_1 = h f(t_1, y_1) = 0{,}1(0{,}1 + 1{,}110341667) = 0{,}1210341667$

$k_2 = h f(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}) = 0{,}132085875$

$k_3 = h f(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}) = 0{,}13263846$

$k_4 = h f(t_1 + h, y_1 + k_3) = 0{,}144298013$

$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1{,}242805417$

$t_2 = y_1 + h = 0{,}2$

3. askel: $k_1 = 0{,}1442805417 \qquad k_3 = 0{,}1570652412$

$k_2 = 0{,}1564945398 \qquad k_4 = 0{,}1699910383$

$y_3 = y_2 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1{,}399716994$

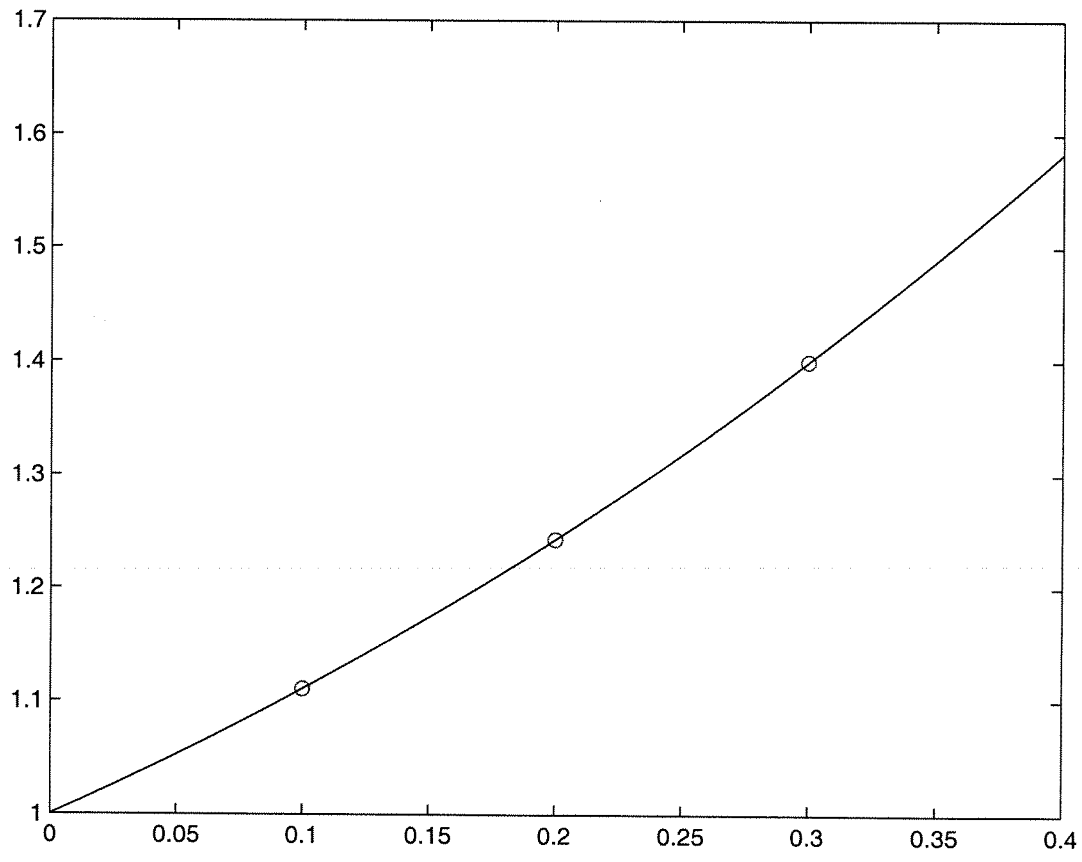
$t_3 = y_2 + h = 0{,}3$

1. tehtävä

Tarkka ratkaisu on $y(t) = 2e^t - t - 1$.

Seuraavassa Matlab-koodi, joka laskee Runge-Kutta-askelet ja piirtää numeerisesti lasketut ratkaisupisteet samaan kuvaan tarkan ratkaisun kanssa.

```
h = 0.1; t = 0; y = 1;
tvec = []; yvec = [];

for j = 1 : 3;
    k1 = h * (t + y)
    k2 = h * (t + h/2 + y + k1/2)
    k3 = h * (t + h/2 + y + k2/2)
    k4 = h * (t + h + y + k3)
    y = y + 1/6 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)
    t = t + h;
    % Kerätään t:n ja y:n arvot plottausta varten
    yvec = [yvec y];
    tvec = [tvec t];
end

% Tarkka ratkaisu
ttarkka = [0 : .001 : 0.4];
ytarkka = 2 * exp(ttarkka) - ttarkka - 1;

% Piirretään kuva
plot(ttarkka, ytarkka, 'k-', tvec, yvec, 'ro')
```



10.A2 $\quad y'' + y = 0 \quad y(0) = -1 \quad y'(0) = 0$

Kirjoitetaan 1. kertaluvun systeemiksi:

$$\begin{matrix} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}^{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Siis $\vec{x}' = f(x,t) = A\vec{x}$ $\quad$ (f ei riipu nyt t:stä)

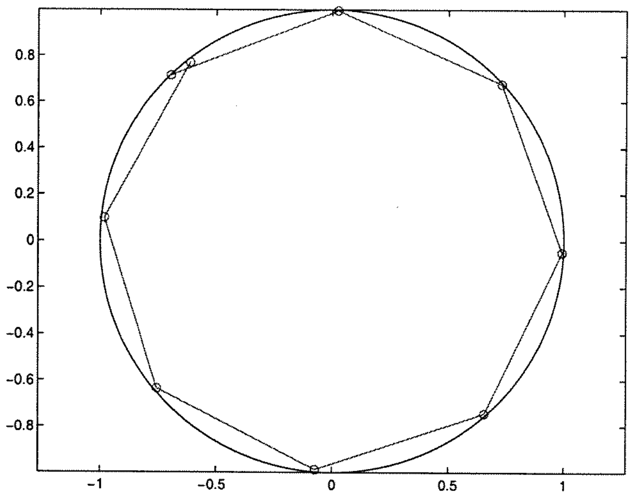
Pseudokoodi (melkein Matlab-koodia)

```
x = [-1; 0]
t = 0                                   Alkuarvot

for j = 1 : nmax
    k1 = h * A * x
    k2 = h * A * (x + k1/2)
    k3 = h * A * (x + k2/2)
    k4 = h * A * (x + k3)
    x = x + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6
    t = t + h
    x = [xvec x]                        Ratkaisun arvot
    t = [tvec t]                        talteen
end
```

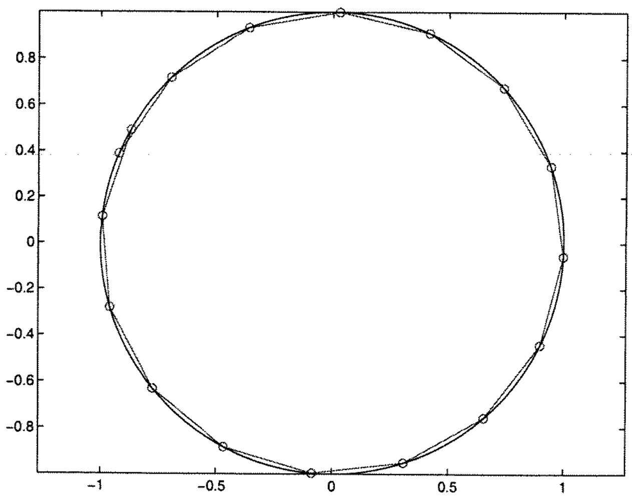
2. tehtävä

```
A = [0 1; -1 0];
t = 0; x = [-1; 0];
tvec = []; xvec = [];

for j = 1 : nmax;
    k1 = h * A * x;
    k2 = h * A * (x + k1/2);
    k3 = h * A * (x + k2/2);
    k4 = h * A * (x + k3);
    x = x + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)/6;
    t = t + h;
    % Kerätään t:n ja x:n arvot plottausta varten
    xvec = [xvec x];
    tvec = [tvec t];
end

% Tarkka ratkaisu on ympyrä:
t = [0 : .01 : 2*pi]; ymp1 = cos(t); ymp2 = sin(t);

% Piirretään kuva
plot(xvec(1, :), xvec(2, :), 'ro-', ymp1, ymp2, 'k-')
axis equal
```

$h = 0{,}4$:



$h = 0{,}8$:



3. tehtävä

(a) Heunin menetelmä

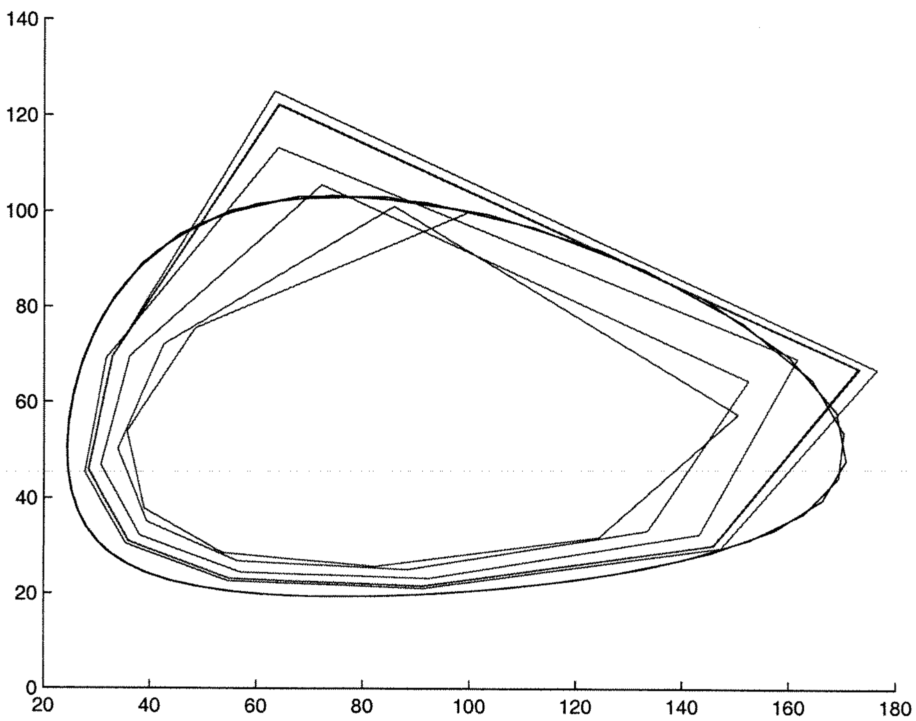
$$\vec z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec z\,' = \begin{pmatrix} 200 z_1 - 4 z_1 z_2 \\ -150 z_2 + 2 z_1 z_2 \end{pmatrix} =: f(t, \vec z)$$

$$\vec z(0) = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} =: \vec z_0$$

```
h = [0.001 0.0045];
nmax = 100;
clf; hold on
xvec = []; yvec = [];
varit = ['b' 'r' 'k'];

for hind = 1 : length(h)
    t = 0; z = [100; 100];
    tvec = t; zvec = z;
    for j = 1 : nmax;
        fz = [200*z(1) - 4*z(1)*z(2); -150*z(2) + 2*z(1)*z(2)];
        ztahti = z + h(hind) * fz;
        fztahti = [200*ztahti(1) - 4*ztahti(1)*ztahti(2); ...
            -150*ztahti(2) + 2*ztahti(1)*ztahti(2)];
        k = (fz + fztahti)/2;
        z = z + h(hind) * k;
        t = t + h(hind);
        % Kerätään t:n ja x:n arvot plottausta varten
        zvec = [zvec z];
        tvec = [tvec t];
    end
    plot(zvec(1, :), zvec(2, :), varit(hind))
end
```

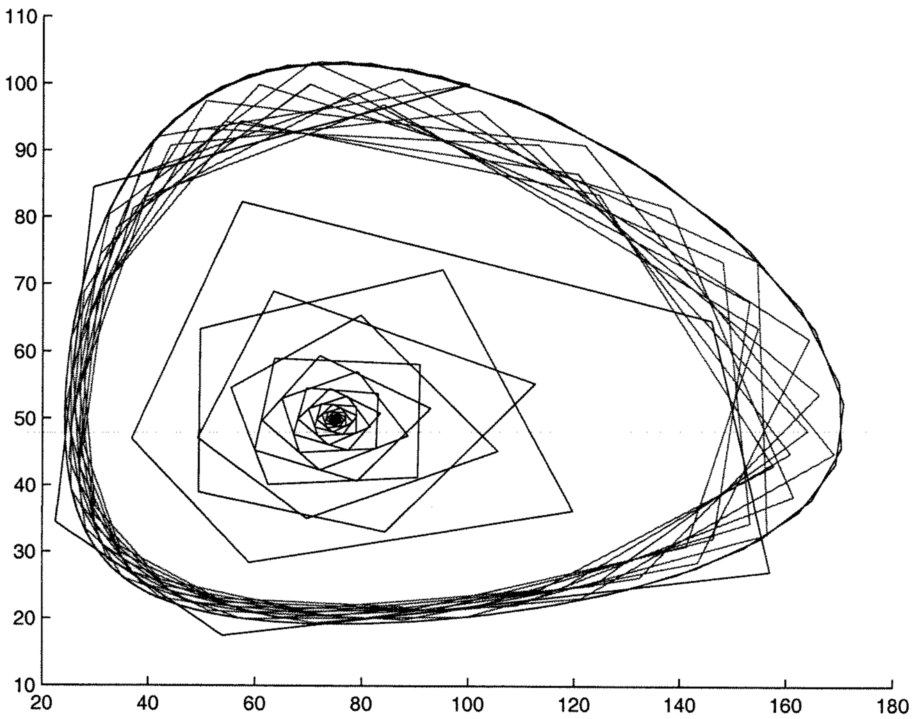
Numeerinen ratkaisu karkaa käsistä askelpituudella $h = 0{,}005$; tätä ei ole piirretty kuvaan. Askelpituudella $h = 0{,}0045$ ratkaisu pysyy rajoitettuna. Askelpituudella $h = 0{,}001$ ratkaisu näyttää jo melko sileältä ja sykliseltä:



(b) Klassinen Runge-Kutta-menetelmä

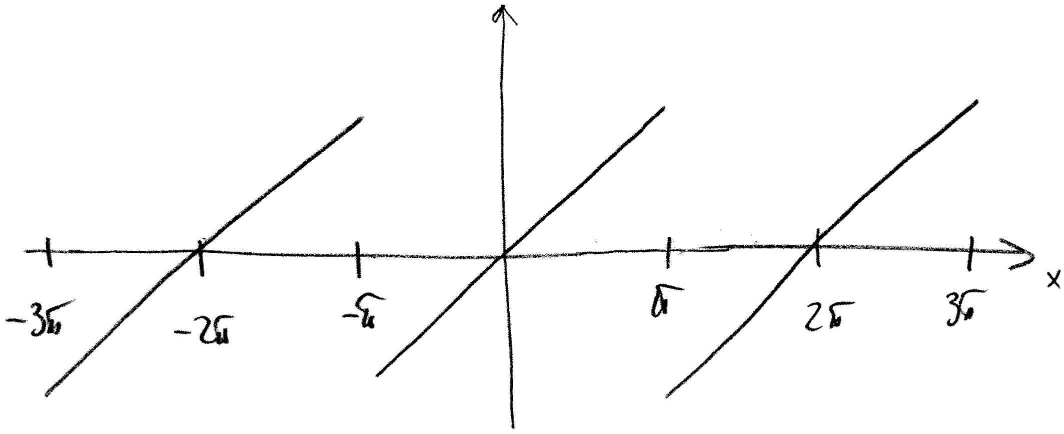
```
h = [0.001 0.0045 0.0085];
nmax = 100;
clf; hold on
xvec = []; yvec = [];
varit = ['b' 'r' 'k'];

for hind = 1 : length(h)
    t = 0; z = [100; 100];
    tvec = t; zvec = z;
    for j = 1 : nmax;
        zzz = z;
        k1 = h(hind) * [200*zzz(1) - 4*zzz(1)*zzz(2); -150*zzz(2) + 2*zzz(1)*zzz(2)];
        zzz = z + k1/2;
        k2 = h(hind) * [200*zzz(1) - 4*zzz(1)*zzz(2); -150*zzz(2) + 2*zzz(1)*zzz(2)];
        zzz = z + k2/2;
        k3 = h(hind) * [200*zzz(1) - 4*zzz(1)*zzz(2); -150*zzz(2) + 2*zzz(1)*zzz(2)];
        zzz = z + k3;
        k4 = h(hind) * [200*zzz(1) - 4*zzz(1)*zzz(2); -150*zzz(2) + 2*zzz(1)*zzz(2)];
        z = z + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)/6;
        t = t + h(hind);
        % Kerätään t:n ja x:n arvot plottausta varten
        zvec = [zvec z];
        tvec = [tvec t];
    end
    plot(zvec(1, :), zvec(2, :), varit(hind))
end
```

Nyt ratkaisu pysyy rajoitettuna jopa askelpituudella h =0,0085, mutta suppenee kohti tasapainopistettä $(75, 50)$. Askelpituudella h =0,0045 ratkaisu seuraa tarkempaa (h =0,001) ratkaisua paremmin kuin Heunin menetelmällä.

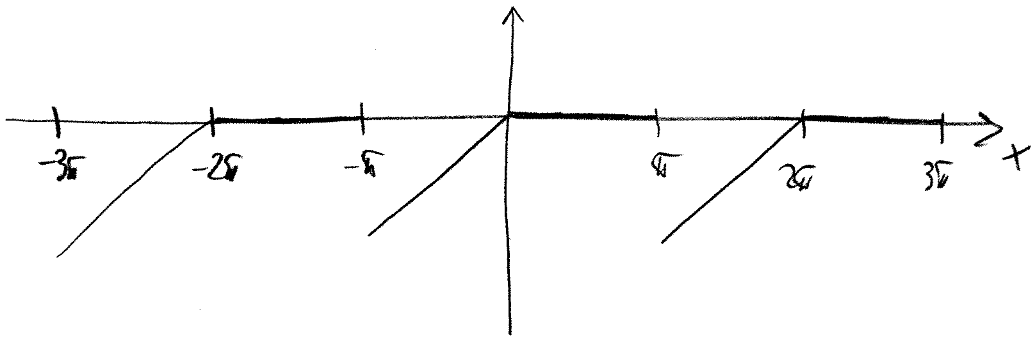


10.A4

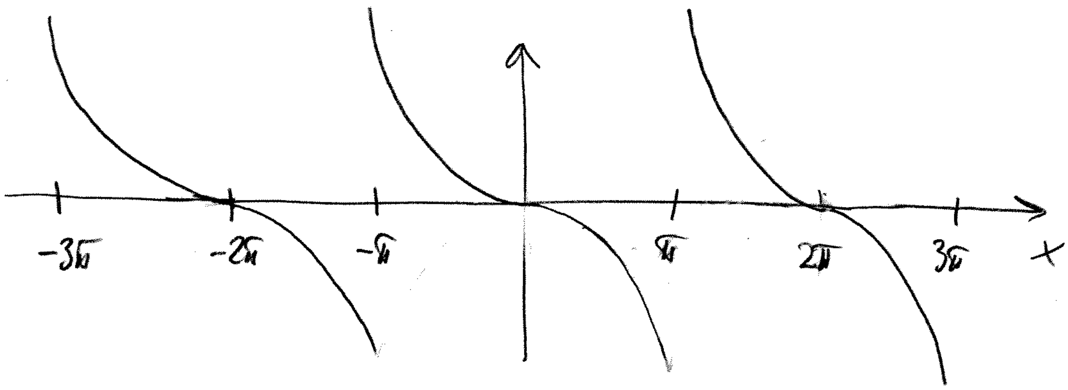
a)



b)



c)



10.A5 (a) $f(x) = x \cos nx$

$$f(-x) = -x \underbrace{\cos[\underbrace{n(-x)}_{=-nx}]}_{=\cos nx} = -x \cos nx = -f(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

PARITON

(b) $f(x) = x^2 \cos nx$

$$f(-x) = \underbrace{(-x)^2}_{=x^2} \underbrace{\cos n(-x)}_{\substack{=\cos -nx \\ =\cos nx}} = x^2 \cos nx = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

PARILLINEN

(c) $f(x) = \cos x + \sin x$

$$f(-x) = \underbrace{\cos(-x)}_{=\cos x} + \underbrace{\sin(-x)}_{-\sin x} = \cos x - \sin x$$

$f(-x) = \cos x - \sin x = \cos x + \sin x = f(x)$

vain kun $\sin x = 0$ eli kun $x = n\pi$ jollakin $n \in \mathbb{Z}$

SIIS EI KAIKILLA $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ EI PARILLINEN

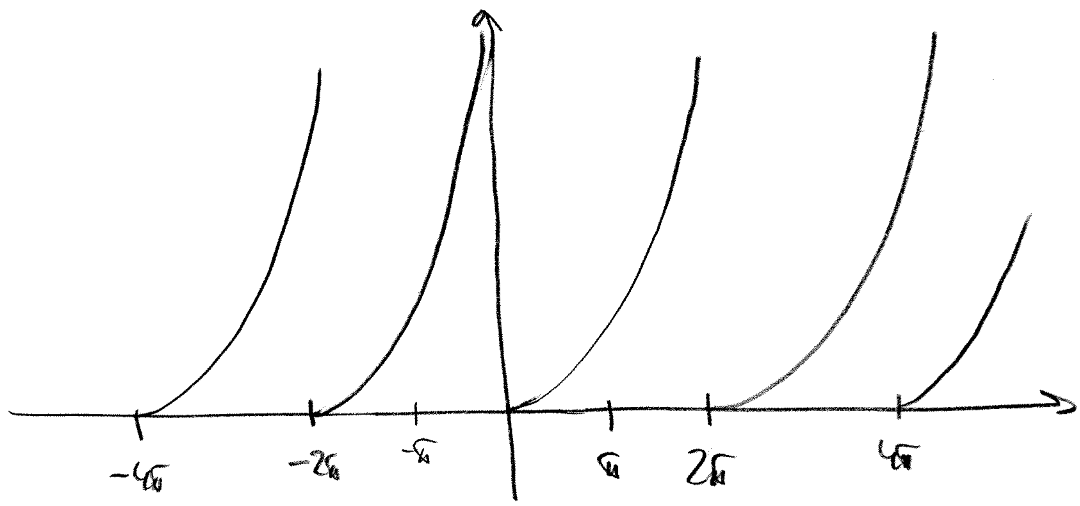
$f(-x) = \cos x - \sin x = -\cos x - \sin x = -f(x)$

vain kun $\cos x = 0$ eli kun $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ jollakin $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ EI PARITON

10. AS...

(d) $f(x) = x^2$, kun $0 < x < 2\pi$, 2π-jaksollinen



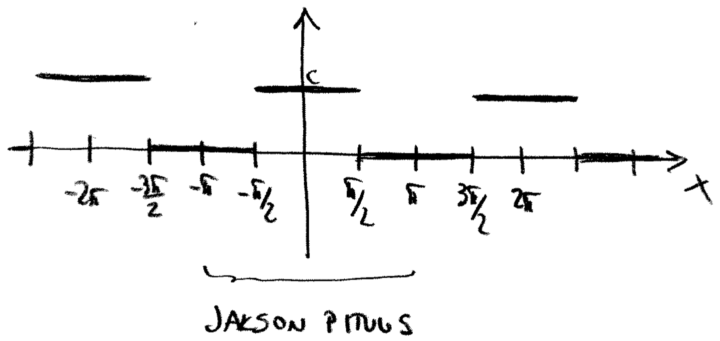
EI PARILLINEN EIKÄ PARITON

(Vaikkapa kun $-2\pi < x < 0$,

$$f(x) = f(\underbrace{x+2\pi}_{\in (0,2\pi)}) = (x+2\pi)^2 \neq x^2 \quad \text{ja} \quad (x+2\pi)^2 \neq -x^2.)$$

10.A6

$$f(x) = \begin{cases} c, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$



f on parillinen.

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$ (Tehtäväpaperin kaavassa $L = \pi$)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}_{= c\cdot\pi} = \frac{c}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \,dx = \frac{c}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos nx\,dx = \frac{c}{n\pi} \Big/_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin nx$$

Parittomat indeksit $n = 2k-1$: $$a_{2k-1} = \frac{c}{(2k-1)\pi}\Big[\underbrace{\sin\left[(2k-1)\tfrac{\pi}{2}\right]}_{=(-1)^{k-1}} - \underbrace{\sin\left[-(2k-1)\tfrac{\pi}{2}\right]}_{=(-1)^{k}}\Big] = \frac{2c\,(-1)^{k-1}}{(2k-1)\pi}$$

Parilliset indeksit $n = 2k$: $$a_{2k} = \frac{c}{2k\pi}\Big[\underbrace{\sin k\pi}_{=0} - \underbrace{\sin -k\pi}_{=0}\Big] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx = \frac{c}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin nx\,dx = -\frac{c}{n\pi}\Big/_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos nx = \frac{c}{n\pi}\Big[\underbrace{\cos\left(-\tfrac{n\pi}{2}\right)}_{=\cos\frac{n\pi}{2}} - \cos\frac{n\pi}{2}\Big] = 0$$

Siis $$f(x) \sim \frac{c}{2} + \frac{2c}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cos(2k-1)x = \frac{c}{2} + \frac{2c}{\pi}\cos x + \frac{2c}{3\pi}\cos 3x + \dots$$

6. tehtävä

```
x = [-2*pi : .01 : 2*pi];
c = 2;
f1 = c/2;
f2 = f1 + 2*c/pi*cos(x);
f3 = f2 - 2*c/(3*pi) * cos(3*x);
f4 = f3 + 2*c/(5*pi) * cos(5*x);
f5 = f4 - 2*c/(7*pi) * cos(7*x);
f6 = f5 + 2*c/(9*pi) * cos(9*x);
plot(x, f, x, f1, x, f2, x, f3, x, f4, x, f5, x, f6)
```