Matematiikan peruskurssi K3/P3, syksy 2005
Kenrick Bingham 8.11.2005

Toisen välikokeen alueen ydinasioita

Alla on lueteltu joitakin koealueen ydinkäsitteitä, joiden on hyvä olla ensiksi selvillä kokeeseen valmistauduttaessa. Kokeessa menestyäkseen on syytä osata myös paljon muuta. Näistä ei välttämättä ole suoranaisesti mitään apua kokeessa, mutta koealueeseen tutustuminen sujunee paremmin, kun nämä ovat hallussa. En ota myöskään vastuuta paino- tai muista virheistä.

Matriisit

- Lukutaulukoita, joita voi laskea yhteen alkioittain (kuten vektoreita)
- Jutun juju on kuitenkin matriisikertolaskussa, jonka avulla esitetään erilaisia lineaarikombinaatioita (ks. jäljempänä)
- $m \times n$-matriisi
$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
- Tulo AB on määritelty vain jos A:ssa on yhtä monta saraketta kuin B:ssä on rivejä.
- Yleisesti $AB \neq BA$

Matriisi-vektori-kertolasku, lineaariset yhtälöryhmät

- Vektoreiden (tai lukujen) $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\ldots$, $\mathbf{v_n}$ *lineaarikombinaatiolla* tarkoitetaan muotoa
$$\sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{v_j} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \cdots + c_n\mathbf{v_n} \tag{1}$$
olevaa lauseketta. Luvut c_j ovat lineaarikombinaation kertoimet.
- Lineaarinen riippumattomuus/riippuvuus:
Vektorit v_1, v_2, $\ldots$, v_n ovat *lineaarisesti riippumattomat*, jos niiden lineaarikombinaatio (1) on nolla vain, kun $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

  Muussa tapauksessa nämä vektorit ovat *lineaarisesti riippuvat*,
ts. jos jokin muukin niiden lineaarikombinaatio on nolla.
- $m \times n$-matriisilla kertominen muuttaa $n \times 1$-pystyvektorin ($\in \mathbb{R}^n$)
$m \times 1$-pystyvektoriksi ($\in \mathbb{R}^m$)

- Lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

  on matriisimuodossa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eli (huom. voi olla $m \neq n$)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

  (Lineaarista yhtälöryhmää voi ajatella perussyyksi syynä sille, että matriiseilla lasketaan.)

- Toisin sanoen yritetään etsiä sellaiset luvut x_1, x_2, ... x_n, että niiden halutut lineaarikombinaatiot antavat luvut $b_1, b_2, \ldots, b_m$.

- Lineaarisella yhtälöryhmällä (eli matriisiyhtälöllä) on joko nolla, yksi tai äärettömän monta ratkaisua.

- Jos yhtälöryhmällä on ratkaisu(ja), se voidaan laskea *Gaussin algoritmilla*, joka on syytä osata.

- Gaussin algoritmissa muunnetaan matriisi rivioperaatioilla riviporrasmuotoon (engl. row echelon form eli REF). Tässä muodossa:

  - *Tukialkio* on rivin vasemmalta lukien ensimmäinen $\neq 0$ alkio.
  - *Tukisarake* on sarake, jossa on tukialkio.

- Gaussin algoritmia voidaan käyttää

  - pelkän kerroinmatriisin A rakenteen analysointiin (lineaarisesti riippumattomien *rivien* lukumäärä ei muutu rivioperaatioissa)
  - lineaarisen yhtälösysteemin ratkaisemiseen soveltamalla algoritmia *liitännäismatriisiin*

$$\tilde{A} := [Ab] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

- Liitännäismatriisin riviporrasmuodosta voidaan nähdä, onko lineaarisella yhtälöryhmällä ratkaisuja:

  - Jos siinä on rivi $[\,0\,0\,\cdots\,0\,|\,c\,]$, missä $c \neq 0$, ratkaisua ei ole (em. rivi vastaa mahdotonta yhtälöä $0x_1 + \cdots + 0x_n = c$).
  - Muussa tapauksessa:
    * Jos A:n jokainen sarake on tukisarake, ratkaisuja on tasan yksi (koska tällöin voidaan ratkaista takaisinsijoittamalla ensin x_n, sitten x_{n-1} jne.)
    * Muussa tapauksessa ratkaisuja on äärettömän monta (kutakin ei-tukisaraketta vastaava muuttuja jää vapaaksi).

Dimensio, kanta, rangi

- Vektoriavaruuden X *dimensio* $\dim(X)$ kertoo, kuinka monta lineaarisesti riippumatonta vektoria X:stä löytyy.
- Vektoriavaruuden X kanta on mahdollisimman suuri joukko lineaarisesti riippumattomia X:n vektoreita. Siis jos $\dim(X) = n$, X:n kannassa on tasan n vektoria.

  Samalla vektoriavaruudella on aina äärettömän paljon eri kantoja.
- *Sarakeavaruus* $\mathrm{col}(A) = \{A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$, *riviavaruus* $\mathrm{row}(A)$
- $n \times m$-matriisin *rangi* $r(A) = \dim(\mathrm{col}(A)) = \dim(\mathrm{row}(A))$
  $=$ lineaarisesti riippumattomien sarakkeiden lukumäärä
  $=$ lineaarisesti riippumattomien rivien lukumäärä
- *Nolla-avaruus* $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax = 0\}$, $n(A) = \dim N(A)$ on lineaarisen yhtälöryhmän $Ax = b$ vapaiden muuttujien lukumäärä
- Dimensiolause (lineaarialgebran peruslause):
  $r(A) + n(A) = n$, kun A on $m \times n$-matriisi
- Rangi ei muutu Gaussin rivioperaatioissa

Neliömatriisit: käänteismatriisi, ominaisarvot

- Neliömatriisin A *käänteismatriisi* A^{-1} on matriisi, jolle $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
- Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä $n \times n$-matriisille A
  - Käänteismatriisi A^{-1} on olemassa
  - $r(A) = n$
  - $\det A \neq 0$ (muistathan, miten determinantin arvo lasketaan)
  - Yhtälöryhmällä $Ax = b$ on tasan yksi ratkaisu $x = A^{-1}b$
- $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$: λ on A:n *ominaisarvo* ja $\mathbf{v} \neq 0$ sitä vastaava *ominaisvektori*
- Ominaisarvon etsiminen: Jotta yhtälöllä $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ voisi olla *nollasta poikkeava* ratkaisu $\mathbf{x}$, pitää olla

  $$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{2}$$

  Ominaisarvot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ saadaan n:nnen asteen yhtälön (2) ratkaisuina.

  Vastaavat ominaisvektorit ratkaistaan lineaarisesta yhtälöryhmästä $(A - \lambda_j I)\mathbf{v}_j = 0$.

- Ominaisarvon λ_j algebrallinen kertaluku M_{λ_j} kertoo, kuinka moninkertainen juuri se on yhtälölle (2).

  Ominaisarvon λ_j algebrallinen kertaluku m_{λ_j} kertoo vastaavien lineaarisesti riippumattomien ominaisvektorien lukumäärän.

$$1 \leqslant m_{\lambda_j} \leqslant M_{\lambda_j} \qquad M_{\lambda_1} + \cdots + M_{\lambda_k} = n$$

- Diagonalisointi (jos A:lla n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria):
  $A = VDV^{-1}$, missä

$$V = \begin{bmatrix} \\ \mathbf{v_1 v_1} \cdots \mathbf{v_n} \\ \\ \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

- Idea: Kun matriisi on diagonalisoitu, A:lla kertomisesta tulee diagonaalimatriisilla kertomista, joka on kevyt toimenpide:

$$\begin{aligned} A^k\mathbf{x} &= VDV^{-1}VDV^{-1}(VDV^{-1})^{k-2}\mathbf{x} = VD^2V^{-1}(VDV^{-1})^{k-1}\mathbf{x} \\ &= VD^2V^{-1}VDV^{-1}(VDV^{-1})^{k-3}\mathbf{x} = \cdots \\ &= VD^kV^{-1}\mathbf{x} \end{aligned}$$

Esimerkki ominaisarvojen laskemisesta

Lasketaan matriisin

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 27 & 9 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 18 & 1 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit: Karakteristinen polynomi on

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 27 & 9 \\ 0 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 18 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 75\lambda + 250.$$

Kolmannen asteen polynomille on ratkaisukaava, mutta se on jonkin verran monimutkainen. Tavallisesti harjoitustehtävässä on esim. joko annettu jokin juurista tai pyydetty kokeilemaan pieniä kokonaislukuja tms. Kun kaikki paitsi kaksi juurta on löydetty, loput kaksi saadaan jakamalla karakteristinen polynomi tekijöillä $\lambda - \lambda_1, \ldots, \lambda - \lambda_{n-2}$, missä λ_j:t ovat tunnetut juuret.

Tässä tapauksessa voitaisiin vaikkapa kertoa, että yksi juurista on -5.
Tällöin loput kaksi saadaan jakamalla karakteristinen polynomi $\lambda + 5$:llä seuraavasti:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & -\lambda^2 & +5\lambda & +50 & \\
\cline{2-5}
\lambda - 10 & \multicolumn{1}{|r}{-\lambda^3} & & +75\lambda & +250 \\
- & -\lambda^3 & -5\lambda^2 & & \\
\hline
 & & 5\lambda^2 & +75\lambda & +250 \\
 & - & 5\lambda^2 & +25\lambda & \\
\cline{2-5}
 & & & 50\lambda & +250 \\
 & & - & 50\lambda & +250 \\
\cline{3-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

Siis kaksi muuta juurta saadaan polynomin $-\lambda^2 + 5\lambda + 50$ juurista, jotka ovat -5 ja 10.

Ominaisarvot ovat siis -5 (kaksinkertainen, ts. algebrallinen kertaluku $M_{-5} = 2$) ja 10 (yksinkertainen, ts. algebrallinen kertaluku $M_{10} = 1$).

Lasketaan niitä vastaavat ominaisvektorit. Ensin ominaisarvoa -5 vastaavat:
(Niitä voi siis olla vähintään 1 ja enintään 2 ($= M_{-5}$) lineaarisesti riippumatonta.)

$$
\big(A - (-5)I\big)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 27 & 9 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 18 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 27 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 18 & 6 & 0 \end{array}\right],
$$

missä oikealla on kirjoitettu yhtälöryhmä tiiviisti liitännäismatriisiksi.
Lasketaan ominaisvektorit Gaussin algoritmilla; jätetään liitännäismatriisin oikea puoli kirjoittamatta, koska nollavektori säilyy rivioperaatioissa nollavektorina:

$$
\begin{bmatrix} 0 & 27 & 9 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 18 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} :9 \\ :2 \\ :6 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{cc} -1 & -1 \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{array} \sim \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Tukialkioita on tässä riviporrasmuodossa vain *toisessa* sarakkeessa oleva luku 3, joten muita sarakkeita vastaavat muuttujat x_1 ja x_3 ovat vapaita. Merkitään x_1:tä parametrilla s ja x_3:a parametrilla t; tällöin $x_2 = -\frac{1}{3}x_3 = -\frac{1}{3}t$. Siis

$$
\mathbf{v} = \begin{bmatrix} s \\ -\frac{1}{3}t \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4}
$$

Se, että muuttujat x_1 ja x_3 ovat vapaita, tarkoittaa, että parametrit s ja t voivat saada kaikki mahdolliset arvot, paitsi että ne eivät voi olla yhtäaikaa nollia (koska silloin saataisiin $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, joka ei kelpaa ominaisvektoriksi).

Vapaita parametreja on siis 2, joten lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita saadaan 2, esim. (4):n oikealla puolella olevat

$$
\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix},
$$

jotka saadaan (4):stä valinnoilla $s = 1$, $t = 0$ ($\mathbf{v_1}$) ja $s = 0$, $t = 1$ ($\mathbf{v_2}$).
Nämä kaksi vektoria ovat siis ominaisarvoa -5 vastaavan ominaisavaruuden kanta.
Niiden lukumäärä on tämän ominaisarvon geometrinen kertaluku: $m_{-5} = 2$.

Vastaavasti lasketaan ominaisarvoa 10 vastaava ominaisvektori:

$$\big(A-10I\big)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -15 & 27 & 9 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 18 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -15 & 27 & 9 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 18 & -9 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} -15 & 27 & 9 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 18 & -9 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ 3 \\ \hookleftarrow \end{array} \begin{array}{c} \\ :3 \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} -15 & 27 & 9 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tukisarakkeita ovat nyt ensimmäinen ja toinen, joten vapaa muuttuja on $x_3 =: t$, jolloin

$$x_2 = \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2}t \quad \text{ja} \quad x_1 = \frac{27x_2 + 9x_3}{15} = \frac{3}{2}t \qquad \text{eli} \qquad \mathbf{v} = t\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Valinnalla $t = 1$ saadaan nyt

$$\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalisointi

Ominaisarvoyhtälöt ovat

$$A\mathbf{v_1} = \lambda_1\mathbf{v_1} \qquad A\mathbf{v_2} = \lambda_2\mathbf{v_2} \qquad A\mathbf{v_3} = \lambda_3\mathbf{v_3}.$$

Kun nämä kirjoitetaan vierekkäin yhdeksi matriisiyhtälöksi, saadaan

$$AV = VD, \tag{5}$$

missä D ja V ovat (3):ssa esitellyt matriisit. Koska tässä tapauksessa kaikkien ominaisarvojen geometriset kertaluvut ovat yhtä suuret kuin algebralliset kertaluvut, A:lla on niin monta lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria kuin $\mathbb{R}^3$:een mahtuu, eli 3. Siis kun ominaisvektorit pannaan vierekkäin matriisiin V, saadaan kääntyvä matriisi. Yhtälö (5) voidaan siis kertoa oikealta V^{-1}:llä, jolloin saadaan A:n *diagonalisointi*

$$A = VDV^{-1},$$

missä

$$D = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad \text{ja} \qquad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Käänteismatriisi V^{-1} voitaisiin nyt laskea esim. Gaussin algoritmilla.)