Teknillinen korkeakoulu Apiola/Bingham
Matematiikka

**Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3 syksy 2005**
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`

**Laskuharjoitus 9 AV/10 LV** (viikko 47 , 21 – 25.11.2005)

`[KRE]` 3.3 – 3.6 ja CH 19 DY-numeriikkaa
L-sivulla pieni pruju numeerisista DYS-menetelmistä (tulee).
`http://math.rice.edu/~dfield/` MATLAB-ohjelma `pplane7.m`. Moni tehtävä saa aivan uutta hohtoa sitä käyttäen.
Käyttö: Sijoita `pplane7.m`-tiedosto johonkin, käynnistä MATLAB ja mene MATLAB:n `cd`-komennolla "sinne johonkin". Sitten vain kirjoitat MATLAB- komennon: `pplane7`. (Versiossa 7 eivät näköjään kaikki piirteet toimi, mutta hupia ja hyötyä siitä on niinensäkin.)
Huom! Jos piirto punaisella värillä jatkuu ja jatkuu, kannattaa painaa stop-painiketta. Esim. (melkein) jaksollisen ratkaisun tapauksessa laskenta saattaa jatkua ikuisuuden.

## Alkuviikko

1. Epähomogeeniyhtälölle (EHY) $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ johdettiin ratkaisukaava:
   $\boldsymbol{y}(t) = E(t)\boldsymbol{y}_0 + \int_0^t E(t-s)\boldsymbol{g}(s)ds.$
   Vektorifunktion integrointi tarkoittaa yksinkertaisesti integrointia komponenteittain.
   Tässä $E(t)$, jolle käytetään myös merkintää $e^{At}$ tarkoittaa homogeeniyhtälön (HY) ns. perusmatriisia, ts. matriisia, jonka sarakkeina on (HY):n LRT ratkaisufunktiot ja jolle $E(0) = I$ (yksikkömatriisi).
   Ratkaise (EHY) systeemi:
   $$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 9 & -5 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(0) = (1, -1)$$
   Huomaa, että (HY) on sama kuin 9 LV teht. 3:ssa.

2. Jos $\mathbf{0}$ on satulapiste systeemille $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$, niin mikä on sen tyyppi ja stabiilisuus systeemeille
   (a) $\boldsymbol{y}' = A^2\,\boldsymbol{y}$ ja (b) $\boldsymbol{y}' = A^3\,\boldsymbol{y}$ ?

3. Klassinen saalis-saalistaja-ongelma ("ketut ja jänikset", Volterran-Lotkan malli) on seuraavanlainen: Alueella olevien jänisten ja kettujen lukumääriä merkitään $x(t)$:llä ja $y(t)$:llä vastaavasti.
   Ajatellaan, että jänikset syövät ruohoa ja ketut jäniksiä (ja vain niitä). Kasvua rajoittavia tekijöitä ei ole, muuta kuin jäniksille ketut ja ketuille jänisten puute (eli kilpailevat ketut). Tilannetta mallintavat yhtälöt voisivat olla vaikkapa: $\begin{cases} x' = 200\,x - 4\,x\,y \\ y' = -150\,y + 2\,x\,y. \end{cases}$
   Määritä systeemin kriittiset pisteet ja linearisoi niissä (äläkä välitä, vaikka piste $(0, 0)$ on "epäfysikaalinen"). Määritä linearisoitujen systeemien luonne.
   Piirrä mieluusti `pplane7`-ohjelmalla MATLAB:ssa. Linearisoinnissa keskus on ongelmallinen, pohdi kuvan perusteella, näyttääkö käytös tässä tapauksessa säilyvän linearisoinnissa.
   Huom! Suorita linearisointi tässä ja muissakin *Jacobin matriisia* käyttäen, kuten alla olevassa ohjeessa. (KRE-kirjassa hiukan niukasti ja vain erityistapaukseenn soveltuen heiluriselvityksen yhteydessä.)

4. Määritä systeemin
   $$\begin{cases} x' = x - x^2 + 2y + 3 \\ y' = -x + 2y \end{cases}$$
   kriittiset pisteet.
   Linearisoi systeemi kunkin kriittisen pisteen suhteen ja määritä niiden luonne sekä hahmottele faasikuvaa.

5. Tarkastellaan vaimentamatonta heiluria, jonka yhtälö on $\Theta'' + k\sin(\Theta) = 0$. Kun se kirjoitetaan 1. kertaluvun systeemiksi, voidaan ratkaista kriittiset pisteet ja suorittaa linearisointi, piirtää faasitasokuva jne.
   Tämä on tehty mm. KRE8 Exa 1 ss. 176–177 (Linearisointi voitaisiin, kuten sanottu, tehdä alla neuvotulla Jakobiaani-tyylillä, joka on yleispätevämpi.)
   Katso KRE-kirjan kuvaa tai piirrä `pplane7`:llä (valitsemalla *Gallery* ja sieltä *pendulum* (anna $D$:n olla oletusarvossaan 0)).
   Selvitä heilurin tila (paikka, nopeus, liikkeen suunta)
   (a) Umpinaisen trajektorin ja vaaka- ja pystyakselin leikkauspisteessä (ota mukaan myös "rajatapaustrajektori, joka kulkee pisteen $(\pi, 0)$ kautta).
   (b) Aaltoilevaa (ei umpinaista) trajektoria seuraillen välillä $[0, \pi]$.

6. Sovella Eulerin menetelmää lineaariseen systeemiin $\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 \end{cases} \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 4.$
Käytä askelpituutta $h = 0.2$ ja laske 5 askelta. Piirrä ratkaisupolku $y_1y_2-$tasoon (faasitasoon) ja vertaa tarkkaan ratkaisuun.

## Loppuviikko

1. Ratkaise harj. 9 AV tehtävän 3 jänis-kettu-systeemi Eulerin menetelmällä. $x(0) = 100, y(0) = 100$ ja laske 3 askelta käyttäen askelta $h = 0.2$. Piirrä polku $xy-$tasoon (faasitasoon).

2. Tarkastellaan alkuarvotehtävää $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = [3, 6]^T$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

(a) Ratkaise alkuarvotehtävä tarkasti.
(b) Muodosta numeerinen likiarvo pisteessä $t = 0.2$ laskemalla kaksi askelta Eulerin menetelmällä askelpituudella $h = 0.1$.
(c) Muodosta numeerinen likiarvo pisteessä $t = 0.2$ laskemalla yksi askel Heunin menetelmällä askelpituudella $h = 0.2$.
(d) Kumpi tapa tuottaa tarkemman likiarvon?

Huom! Virhettä voit mitata vaikka tavallisella euklidisella normilla, tai esim. komponenttien erotusten itseisarvojen maksimilla.

3. Kirjoita yksi askel Runge-Kutta menetelmää (RK4), tavalliselle skalaariyhtälölle $y' = ay, \quad y(0) = 1$, askel $h$. Huomaa, että autonomisen yhtälön tapauksessa RK-kaavat voi kirjoittaa yhden muuttujan funktiolle $f(y)$, ts. kaavoissa esiintyvät $t-$ argumentit eivät tule käyttöön.

## Ohjeita

### Linearisointi:

Olkoon DYS $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y). \end{cases}$ ja olkoon $(a, b)$ kriittinen piste (KRP), ts. $f(a, b) = g(a, b) = 0$.

Pisteessä $(a, b)$ linearisoitu systeemi tarkoittaa systeemiä $\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, missä $u = x - a, \quad v = y - b$ ja $A$ on Jacobin matriisi:

$$A = J_F(a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) \end{bmatrix}$$

Jos linearisoidun systeemin O:n luonne on keskus (ominaisarvot puhtaasti imaginaariset), se ei välttämättä kerro alkuperäisen epälineaarisen systeemin KRP:n luonnetta. Muissa tapauksissa ($Re(\lambda) \neq 0$) sensijaan kertoo.

### Diff. yhtälöiden numeriikkaa

Annettu diff. yhtälö(systeemi): $y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$

Jos kyseessä on systeemi, niin $f$ ja $y$ ovat vektoriarvoisia.

**Eulerin menetelmä** $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad y(t_0) = y_0$ GKV $= O(h)$ (GKV=**G**lobaali **k**atkaisu**v**irhe)

**Heunin menetelmä** **Heunin menetelmä (eli parannettu Euler)**

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^\star_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + h\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}_n) \\ \boldsymbol{k}_n = \frac{1}{2}(\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}_n) + \boldsymbol{f}(t_{n+1}, \boldsymbol{y}^\star_{n+1})), \quad \boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + h\,\boldsymbol{k}_n \end{cases}$$